

ESERCIZIO 1: Siano  $\alpha \in \mathbb{R}$  e

$$f(x,y) = \frac{(e^{\sqrt{|xy|}} - 1)^4}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$

poiché  $\frac{e^t - 1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$  e  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{|xy|} = 0$ , si ha

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(xy)^2}{(x^2 + y^2)^\alpha} = 0 \quad \alpha < 2$$

Inoltre, il limite non esiste per  $\alpha \geq 2$ , in tale caso infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0,y) = 0$$

ma

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x,x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{2(2-\alpha)}}{2^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{2^\alpha} & \alpha = 2 \\ +\infty & \alpha > 2 \end{cases}$$

D'ora in poi quindi  $\alpha < 2$ .

Poiché  $f(x,0) = f(0,y) = 0$ , la funzione estesa in  $(0,0)$  col valore 0, è parzialmente derivabile in  $(0,0)$  con  $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ .

$f$  risulta differenziabile in  $(0,0)$  se e solo se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{(x^2 + y^2)^{\alpha + 1/2}} = 0 \quad (*)$$

e ragionando come sopra si trova che  $(*)$  vale se e solo se  $\alpha < 3/2$ .

In tutti gli altri punti  $f$  risulta differenziabile perché ivi di classe  $C^1$ .

Infatti nei punti  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{xy=0\}$  questo è evidente, e invece  $(x_0, y_0)$  t.c.  $x_0 y_0 = 0$ , con uno tra  $x_0$  e  $y_0 \neq 0$ , basta notare che la funzione  $\varphi(t) = (e^{\sqrt{|t|}} - 1)^4$  è di classe  $C^1$  in  $t=0$ .