

ESERCIZIO 3: Trovare gli $\alpha \in (0, +\infty)$ t.c. il solido ottenuto ruotando

$$\{(x,y,z): x=0, 0 \leq z \leq \alpha^2 - y^2\}$$

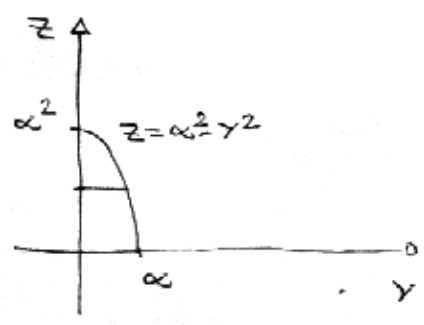
intorno all'asse z abbia baricentro in $(0,0,1)$.

Dalla condizione $0 \leq z \leq \alpha^2 - y^2$ si deduce che la figura piana da ruotare è compresa tra il grafico della parabola $z = \alpha^2 - y^2$ e la retta $z=0$.

Per simmetria le coordinate \bar{x}, \bar{y} del baricentro sono 0.

Per trovare la terza coordinata si ha:

$$\bar{z} = \frac{\iiint_S z \, dx \, dy \, dz}{\text{Vol}(S)}$$



ed essendo S di rotazione segue

$$\text{Vol}(S) = \int_0^{\alpha^2} \pi (\alpha^2 - z)^{\frac{1}{2}} dz = \frac{\pi}{2} \alpha^4$$

$$\iiint_S z \, dx \, dy \, dz = \int_0^{\alpha^2} \pi z (\alpha^2 - z)^{\frac{1}{2}} dz = \frac{\pi}{6} \alpha^6$$

da cui

$$\bar{z} = \frac{\alpha^2}{3}$$

e quindi $\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \alpha \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\} \cap (0, +\infty)$

da cui $\alpha = \sqrt{3}$.