

⑤

$$\sup_{[R,R]} |m e^x \ln\left(\frac{x}{m}\right) - x e^x| \leq R e^R \sup_{[R,R]} \left| \frac{m}{x} \ln\left(\frac{x}{m}\right) - 1 \right|$$

$$= R e^R \sup_{\left[-\frac{R}{m}, \frac{R}{m}\right]} \left| \frac{\ln t}{t} - 1 \right|$$

e quindi lo trovi ricercando il limite notevole  $\ln t/t \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$ .

La convergenza non è uniforme sui sottoinsiemi illimitati superiormente essendo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |y_m(x) - y_n(x)| = +\infty.$$

Infine la convergenza è uniforme su  $(-\infty, 0]$ , e quindi su tutti gli insiemi limitati superiormente.

Infatti, se

$$\varphi_m(x) = y_m(x) - y_n(x)$$

$$\varphi'_m(x) = m e^x \underbrace{\left( \ln\left(\frac{x}{m}\right) - \frac{x}{m} + \frac{1}{m} \ln\left(\frac{x}{m}\right) - \frac{1}{m} \right)}_{\chi_m(x)}$$

$$\text{e } \varphi'_m(x) = 0 \Leftrightarrow \chi_m(x) = 0$$

D'altra parte,

$$\chi'_m(x) = \frac{1}{m} \left( \ln\left(\frac{x}{m}\right) - 1 \right) + \frac{1}{m^2} \ln\left(\frac{x}{m}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left( 1 + \frac{1}{m} \right) e^{2t} - 2e^t + 1 - \frac{1}{3} \geq 0$$

$$t = \frac{x}{m}$$

$$\Leftrightarrow x \leq m \ln\left(\frac{m-1}{m+1}\right), \quad x \geq 0$$