

ESERCIZIO 3 :

$$\begin{cases} m^2 y'' - 2m^2 y' + (m^2 - 1)y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

L' O.D.E. ha integrale generale

$$y(x) = A e^{(1-\frac{1}{m})x} + B e^{(1+\frac{1}{m})x}$$

essendo il polinomio caratteristico associato

$$\lambda^2 - 2\lambda + (1 - \frac{1}{m^2}) = 0,$$

da cui imponendo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ (1 - \frac{1}{m})A + (1 + \frac{1}{m})B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -m/2 \\ B = m/2 \end{cases}$$

Quindi
$$y_m(x) = \frac{m}{2} e^{(1+\frac{1}{m})x} - \frac{m}{2} e^{(1-\frac{1}{m})x}$$

$$= m e^x \sinh\left(\frac{x}{m}\right)$$

Ricordando che $\frac{\sinh t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$ si ottiene che $\forall x \in \mathbb{R}$

$$y_m(x) \longrightarrow y_\infty(x) = x e^x$$

Inoltre, la convergenza è uniforme sui compatti. Infatti, $\forall R > 0$