

ESERCIZIO 1

Sia $f_n(x) = e^{(e^{x/n^2} - 1)} - 1$, allora dal limite notevole $\frac{e^t - 1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$ segue che

$$f_n(x) = \frac{x}{n^2} + o\left(\frac{x}{n^2}\right) \quad n \rightarrow +\infty$$

quindi la serie associata converge puntualmente su tutto \mathbb{R} per confronto con $1/n^2$.

La convergenza è totale sui compatti, in fatti $\forall R > 0$ poiché $t \rightarrow e^t$ è crescente si ha:

$$\sup_{[-R, R]} |f_n| = |f_n(-R)| \vee |f_n(R)|$$

e quindi $\sum_{n \geq 1} \sup_{[-R, R]} |f_n|$ converge per confronto con $1/n^2$.

La convergenza non è uniforme (e quindi neanche totale) su sottoinsiemi illimitati inferiormente e/o superiormente essendo:

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbb{R}} |f_n| &\geq |f_n(-\infty)| \vee |f_n(+\infty)| \\ &= (1 - e^{-1}) \end{aligned}$$