

ESERCIZIO 4:

(7)

$$\begin{cases} XY'' + XY' - Y = X \\ Y(0) = Y'(0) = 0 \end{cases}$$

Cerchiamo la soluzione mediante sviluppo in serie di potenze centrato in $x=0$:

$$Y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n, \quad Y(0) = a_0 = 0$$

$$Y'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}, \quad Y'(0) = a_1 = 0$$

$$Y''(x) = \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

da cui:

$$XY''(x) = \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n x^{n-1} = \sum_{n \geq 1} n(n+1) a_{n+1} x^n$$

$$XY'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^n$$

da cui Y è soluzione se e solo se

$$\sum_{n \geq 1} [n(n+1) a_{n+1} + n a_n - a_n] x^n = x$$

e per il Principio di Identità delle serie di potenze questo accade se:

$$\begin{cases} 2a_2 + \cancel{a_1} - \cancel{a_1} = 1 \\ n(n+1) a_{n+1} + (n-1) a_n = 0 \quad n \geq 2 \end{cases}$$