

(6)

Quindi $\varphi_m(x) \leq 0$ se $x \leq 0$, $\varphi_m(0) = 0$ e

$$\sup_{(-\infty, 0]} |\varphi_m| = |\varphi_m(z_m)|$$

dove $z_m \in (-\infty, m \ln(\frac{m-1}{m+1}))$ è l'unica radice negativa di $\chi_m(x) = 0$.

Si noti che $m \ln(\frac{m-1}{m+1}) \rightarrow -2$, inoltre scegliendo $x_m = 2m \ln(\frac{m-1}{m+1})$ si ha

$$\begin{aligned} \chi_m(x_m) &= \frac{\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^2 - \left(\frac{m+1}{m-1}\right)^2}{2} - 2 \ln\left(\frac{m-1}{m+1}\right) + \\ &\quad \frac{1}{m} \frac{\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^2 + \left(\frac{m+1}{m-1}\right)^2}{2} - \frac{1}{m} \\ &= \frac{\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^2 + \left(\frac{m+1}{m-1}\right)^2}{2(m^2-1)^2} (-4m) + \frac{4}{m+1} + o\left(\frac{1}{m}\right) + \\ &\quad + \frac{(m-1)^4 + (m+1)^4}{2m(m^2-1)^2} - \frac{1}{m} \\ &= -\frac{2}{m} + \frac{4}{m+1} + \frac{1}{m} - \frac{1}{m} + o\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{2(m-1)}{m(m+1)} + o\left(\frac{1}{m}\right) \end{aligned}$$

da cui $\chi_m(x_m) > 0$ per $m \gg 0$.

Quindi: $z_m \in (x_m, \frac{x_m}{2})$, e quindi (z_m) è limitata.

Da cui $\varphi_m(z_m) = e^{z_m} \left(m \ln\left(\frac{z_m}{m}\right) - z_m \right)$ è infinitesima.