

(1)

ESERCIZIO 1 Sia

$$f_n(x) = \ln \left( 1 + \frac{1}{n^{|x|}} \right) (\operatorname{sgn} x)^n$$

per  $x \neq 0$ .

Poiché  $|f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \forall x \neq 0$ , la condizione necessaria per la convergenza puntuale è verificata.

D'altra parte, ricordando il limite notevole

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

la serie converge assolutamente se  $|x| > 1$  e diverge se  $x \in (0, 1]$  per confronto asintotico con  $g_n(x) = 1/n^{|x|}$ .

Se  $x \in [-1, 0)$  la serie è a segni alterni e si verifica facilmente che converge per il Criterio di Leibnitz.

Da quanto sopra, si deduce che la serie non può convergere totalmente su un insieme  $I$  se questo ha come punto di accumulazione  $\bar{z}$  con  $|\bar{z}| \leq 1$ .

Proviamo che se  $\delta > 0$  c'è convergenza totale su  $I_\delta = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1 + \delta\}$ . Infatti, si ha

$$\sup_{I_\delta} |f_n| = \ln \left( 1 + \frac{1}{n^{1+\delta}} \right) \leq \frac{1}{n^{1+\delta}}.$$

Questo risolve anche lo studio della convergenza uniforme su  $(0, +\infty)$  dato che per tali valori di  $x$  si ha  $f_n(x) = |f_n(x)|$ .