

## ESERCIZIO 2: Sia

(2)

$$f(x,y) = 1 + ((x-1)^2 + (y-1)^2)((x+1)^2 + (y+1)^2)$$

allora  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,  $f(x,y) \geq 1 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ .

Poiché  $f(1,1) = f(-1,-1) = 1$  si ha che

$$1 = \inf_{\mathbb{R}^2} f = \min_{\mathbb{R}^2} f = f(1,1) = f(-1,-1)$$

e  $(1,1), (-1,-1)$  sono gli unici punti di minimo.

Si noti che  $f(x,1) = 1 + (x-1)^2((x+1)^2 + 4)$ , da cui

$$f(x,1) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} +\infty$$

e quindi:

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty.$$

Essendo  $f$  regolare e avendo trovato che  $(1,1), (-1,-1)$  sono punti di minimo si avrà:

$$\nabla f(1,1) = \nabla f(-1,-1) = \underline{0}.$$

Cerchiamo, se ci sono, altri punti critici:

$$\nabla f(x,y) = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)((x+1)^2 + (y+1)^2) + (x+1)((x-1)^2 + (y-1)^2) = 0 \\ (y-1)((x+1)^2 + (y+1)^2) + (y+1)((x-1)^2 + (y-1)^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)((x+1)^2 + (y+1)^2) + (x+1)((x-1)^2 + (y-1)^2) = 0 \\ (x-y)((x+1)^2 + (y+1)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2-1)(x+1+x-1) = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{-1, 0, 1\} \\ y = x \end{cases}$$

quindi anche  $(0,0)$  è punto critico.