

avendo posto $\gamma_0(\beta_0^-) = \lim_{x \rightarrow \beta_0^-} \gamma_0(x)$.

Dallo studio dei segni di f e per il Lem di Prolungamento si ha che se $\beta_{\gamma_0} > 2$ allora $\beta_{\gamma_0} = +\infty$.

Notiamo che se γ_0 è vicino a -1 allora $\beta_{\gamma_0} = +\infty$, se così non fosse: $\forall \gamma_0 \in (-1, 0) \beta_{\gamma_0} \in (1, 2]$ e quindi $\gamma_0(\beta_{\gamma_0}) = 0$ da cui per (*):

$$-\infty = \int_{-1}^0 \frac{1}{2 \ln|t|} dt = \lim_{\gamma_0 \rightarrow -1^+} \left(\frac{\beta_{\gamma_0}^4 - 1}{4} + \beta_{\gamma_0}^3 - \beta_{\gamma_0}^2 \right) \in \mathbb{R}$$

e ciò non è possibile.

Invece, se γ_0 è vicino a 0 allora $\beta_{\gamma_0} \in \mathbb{R}$, e quindi $\beta_{\gamma_0} \in (1, 2]$.

Infatti, se $x \in [1, \beta_{\gamma_0} \wedge 2]$ per i segni di f $\gamma_0(x) \geq \gamma_0$, inoltre essendo $t \rightarrow \ln|t|$ concavo su $(-\infty, 0)$ si ha: $\ln|t| \leq -(t+1) \quad \forall t < 0$, quindi $f(x, \gamma) \geq (\gamma+1)(-x^3+3x^2-2x)$ se $x \in [1, 2], \gamma < -1$.

Sia w_0 la soluzione di

$$(+)\begin{cases} w' = 2(1+w)(-x^3+3x^2-2x) \\ w(1) = \gamma_0 \end{cases}$$

allora $\gamma_0(x) \geq w_0(x) \quad x \in [1, \beta_{\gamma_0} \wedge 2]$ dato che w_0 è definita per tutti i tempi futuri essendo

$$w_0(x) = -1 + (\gamma_0 + 1) \cdot e^{\frac{1-x^4}{2} + (x^3-x^2) \cdot 2}$$

D'altra parte, da (+) segue $w'_0(x) \geq 0$ se $x \in [1, 2]$ da cui se $w_0(2) > 0$ si deduce $\beta_{\gamma_0} < 2$.

Ma $w_0(2) = -1 + (\gamma_0 + 1)e^{\frac{1}{2}} > 0 \Leftrightarrow \gamma_0 > -1 + e^{-\frac{1}{2}}$.