

**ESERCIZIO 3** Siamsi  $I_+ = (0, +\infty)$ ,  $I_- = (-\infty, 0)$  (3)  
allora l'O.D.E.

$$x(1+x^2)y' = 2x^2y - y^2 \quad (*)$$

su  $I_+$  è equivalente all'O.D.E. in forma normale

$$y' = \frac{2x}{1+x^2} y - \frac{1}{x(1+x^2)} y^2$$

del tipo di Bernoulli.

Si noti che  $y \equiv 0$  è soluzione stazionaria di (\*) su tutto  $\mathbb{R}$ .

Su  $I_+$  (o  $I_-$ ), cercando soluzioni diverse da quella stazionaria, col cambio di variabile  $z = 1/y$  si ottiene un'O.D.E. lineare

$$z' = -\frac{2x}{1+x^2} z + \frac{1}{x(1+x^2)}$$

che ha integrale generale

$$z(x) = \frac{C_+ + \ln|x|}{1+x^2} \quad x \in I_+, C_+ \in \mathbb{R}$$

$$z(x) = \frac{C_- + \ln|x|}{1+x^2} \quad x \in I_-, C_- \in \mathbb{R}$$

Da cui:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{C_+ + \ln|x|} & x > 0 \\ \frac{1+x^2}{C_- + \ln|x|} & x < 0 \end{cases}$$

Si noti che per ogni scelta di  $C_{\pm} \in \mathbb{R}$  si ha  
 $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 0$

quindi  $y$  è estendibile con continuità in  $x=0$

ma  $\lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} \frac{y(x)}{x} = \mp \infty$ .