

ESERCIZIO 4 Sia

$$f_n(x) = \ln^2(1+x^n) - \ln|x| \ln(1+x^{n^2})$$

allora  $\text{Dom } f_n = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  se  $n$  è pari mentre  
 $\text{Dom } f_n = (-1, +\infty) \setminus \{0\}$  se  $n$  è dispari.

Si studia quindi il comportamento della  
successione sull'insieme

$$I = \bigcap_{n \geq 1} \text{Dom } f_n = (-1, +\infty) \setminus \{0\}.$$

Si noti che:

$$\underline{x=1} \Rightarrow f_n(1) = \ln^2 2$$

$$\underline{0 < |x| < 1} \Rightarrow x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\underline{x > 1} \Rightarrow x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \text{ e quindi}$$

$$\ln^2(1+x^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \quad \ln(1+x^{n^2}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

D'altra parte, se  $x > 1$ :

$$\ln^2(1+x^n) = \left( n \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^n}\right) \right)^2$$

$$\ln(1+x^{n^2}) = n^2 \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^{n^2}}\right)$$

e quindi

$$f_n(x) = 2n \ln x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x^n}\right) - \ln x \ln\left(1 + \frac{1}{x^{n^2}}\right) (*)$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$