

(1)

ESERCIZIO 1:Sussiste $\alpha \in \mathbb{R}$ sia

$$a_m = \int_{\frac{1}{m^\alpha + 2m}}^{\frac{1}{m^\alpha}} \frac{1 - \cos t}{t^3} dt, \text{ poiché}$$

la funzione integranda è non negativa e
 $m^\alpha \leq m^\alpha + 2m \quad \forall m \in \mathbb{N}$ si ha $a_m \geq 0$.

Se $\alpha \leq 0$ la condizione necessaria per la con-
 vergenza non è verificata, infatti:

$$\underline{\alpha = 0} \Rightarrow a_m = \int_{\frac{1}{1+2m}}^1 \frac{1 - \cos t}{t^3} dt \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1 - \cos t}{t^3} dt = +\infty.$$

$$\underline{\alpha < 0} \Rightarrow a_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^3} dt = +\infty.$$

Resta quindi da studiare il caso $\alpha > 0$.

Per tali valori si ha $\frac{1}{m^\alpha}, \frac{1}{m^\alpha + 2m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$ e
 tenendo conto del limite notevole

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - \cos s}{s^2} = \frac{1}{2}$$

si ha per il Teo della Media Integrata

$$a_m = \frac{1 - \cos \xi_m}{\xi_m^2} \int_{\frac{1}{m^\alpha + 2m}}^{\frac{1}{m^\alpha}} \frac{1}{t} dt$$

$$= \frac{1 - \cos \xi_m}{\xi_m^2} \ln \left(1 + \frac{2m}{m^\alpha} \right)$$

con $\xi_m \in \left(\frac{1}{m^\alpha + 2m}, \frac{1}{m^\alpha} \right)$.