

(5)

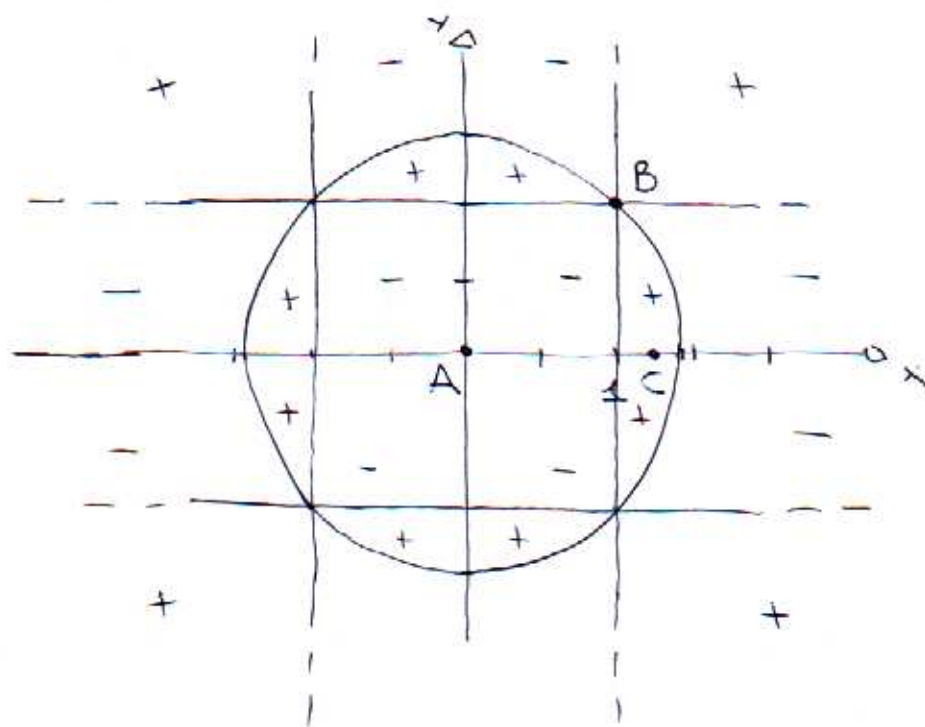
ESERCIZIO 5 Sia $f(x,y) = (y^2-1)(x^2-1)(x^2+y^2-2)$
allora $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Inoltre:

$$f(x,y) = f(x,-y) = f(-x,y) = f(y,x) = f(-x,-y) = f(-y,-x)$$

$$\text{Si ha che } f^{-1}(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|=1, |y|=1, x^2+y^2=2\}$$

Nel disegno sono indicati i segni di f :



Cerchiamo i punti critici di f :

$$\begin{cases} (y^2-1)[2x(x^2+y^2-2) + (x^2-1) \cdot 2x] = 0 \\ (x^2-1)[2y(x^2+y^2-2) + (y^2-1) \cdot 2y] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x(y^2-1)(2x^2+y^2-3) = 0 \\ 2y(x^2-1)(2y^2+x^2-3) = 0 \end{cases} \quad (+)$$

$$x=0 \Rightarrow y=0 \text{ o } |y| = \sqrt{3/2}$$

$$\text{analogamente: } y=0 \Rightarrow x=0 \text{ o } |x| = \sqrt{3/2}$$

$$|x|=1 \Rightarrow |y|=1 \text{ (e viceversa)}$$

Infine, se $x \neq 0, |y| \neq 1, y \neq 0$ e $|x| \neq 1$, (+) è