

Poiché  $f_n(1) = 2n^2$   $\forall n$  e  $f_n \in C^0((-1, +\infty) \setminus \{0\})$   
 su ogni insieme  $J$  che ha  $x=1$  come punto  
 di accumulazione non ci può essere conver-  
 genza uniforme dato che, posto

$$f(x) = 0 \quad x \in (-1, +\infty) \setminus \{0\},$$

$$f(1) = 2n^2$$

si ha

$$\sup_J |f_n - f| \geq 2n^2 \quad \forall n.$$

Sia allora  $\delta > 0$ , proviamo che  $f_n \xrightarrow{[1+\delta, +\infty)} f \equiv 0$ ,  
 infatti da (\*):

$$|f_n(x)| \leq \ln x \left( 2n \ln \left( 1 + \frac{1}{x^n} \right) + \ln \left( 1 + \frac{1}{x^{n^2}} \right) \right)$$

$$\leq \ln x \left( \frac{2n}{x^n} + \frac{1}{x^{n^2}} \right) \stackrel{\ln x \leq x}{\leq} \frac{4n}{x^{n-1}} \leq \frac{4n}{(1+\delta)^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Proviamo anche che  $f_n \xrightarrow{[-1+\delta, 1-\delta] \setminus \{0\}} f \equiv 0$ ,  $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ .  
 Infatti, si ha

$$|f_n(x)| \leq |x|^{2n} + |\ln|x|| |x|^{n^2} \leq 2|x|^{2n} \leq 2(1-\delta)^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$|x| |\ln|x|| \leq e \quad x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$

Infine, se  $J$  è un insieme che ha  $x=-1$  come  
 punto di accumulazione

$$\sup_J f_n = +\infty \quad \text{se } n \text{ è dispari}$$

e quindi non si ha convergenza unifor-  
 me su  $J$ .