

(2)

ESERCIZIO 2:

Sia  $a_n = n^2 - \frac{1}{n}$ , allora posto  $y = x^2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( n^2 - \frac{1}{n} \right) x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n$$

La seconda è una serie di potenze di raggio

$$S = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{\frac{1}{n}}} = 1$$

che non converge se  $y = 1$  visto che  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

Per calcolare la somma  $S$  della serie con:  
viene considerare separatamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{2n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{2n}$$

Per la prima si osserva che

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n \stackrel{|y| < 1}{=} \frac{1}{1-y} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n y^{n-1} = \frac{1}{(1-y)^2} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n y^n = \frac{y}{(1-y)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2 y^{n-1} = \frac{y+1}{(1-y)^3} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 y^n = \frac{y(y+1)}{(1-y)^3}$$

da cui:  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{2n} = \frac{x^2(x^2+1)}{(1-x^2)^3}$

Per la seconda basta applicare il thm di  
Integrazione per Serie, infatti: