

ESERCIZIO 3:

Sia  $f_n(x) = \frac{e^{-n^2/x^2}}{n \ln n}$ ,  $n \geq 2$ , allora  $\text{Dom} f_n = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  
 $f_n \geq 0 \quad \forall x \in \text{Dom} f_n$  e  $f_n$  pari.

Si noti che  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  
 anche che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^x f_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Scegliendo  $\alpha > 1$  si deduce dal Criterio del  
 Confronto Asintotico che la serie converge  
 puntualmente  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Se  $I$  è un insieme limitato di  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  si ha,  
 essendo  $f_n$  crescente su  $(0, +\infty)$ , che:

$$\sup_I f_n = f_n(\sup I)$$

e quindi il Criterio di Convergenza Totale  
 permette di dedurre la convergenza uniforme  
 di  $\sum_{n \geq 2} f_n(x)$  su  $I$ .

Se invece  $I$  è illimitato superiormente, ~~non~~  
 si ha

$$\sup_I f_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n = \frac{1}{n \ln n}$$

e quindi  $\sum_{n \geq 2} f_n(x)$  non converge totalmente  
 su  $I$ .

Proviamo anche che la serie non converge  
 uniformemente su un insieme  $I$  illimitato.

Si noti che la condizione necessaria è ~~non~~  
 disposta, infatti: