

CORSO di LAUREA in FISICA ANALISI MATEMATICA 2A

Prova Scritta

30 Settembre 2005

1. Provare che la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + y^2 & x \neq 0 \\ y^2 & x = 0 \end{cases}$$

risulta continua su $\mathbf{R}^2$. Studiarne la differenziabilità.

2. Determinare l'area della regione del piano interna alla curva di equazione cartesiana

$$x^4 + y^4 = 4xy,$$

che sta nel semipiano $y \geq x$.

3. Sia

$$\omega(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy + z dz,$$

calcolarne la circuitazione lungo le curve, contenute nel suo dominio, delle seguenti famiglie:

- circonferenze con centro sull'asse y e giacenti su un piano ad esso ortogonale;
- ellissi con centro sull'asse z e giacenti su un piano ad esso ortogonale.

(Le curve si intendono orientate in senso antiorario come visto da un osservatore posto nell'origine).

4. Verificare che l'applicazione

$$\Phi(r, t, \theta) = \left(\frac{r}{t} \cos \theta, \frac{r}{t} \sin \theta, r^2 \right)$$

è un cambiamento ammissibile di coordinate tra

$$U = \{(r, t, \theta) \in \mathbf{R}^3 : r > 0, t > 0, \theta \in [0, 2\pi)\}$$

e il semispazio

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z > 0\}.$$

Mediante tale trasformazione si calcoli il volume del solido compreso fra i piani $z = 1$, $z = 4$ e i paraboloidi $z = x^2 + y^2$, $z = 4(x^2 + y^2)$.