

si ottiene $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0$.

Quindi f può essere estesa con continuità su tutto \mathbb{R}^2 ponendo

$$f(x, y) = 0 \quad \text{se } xy \in \{0, 1\}.$$

Per quanto riguarda la differenziabilità si distinguono di nuovo vari casi.

$x_0 y_0 = 1$ La funzione non è differenziabile in (x_0, y_0) dato che non è parzialmente derivabile.

Si consideri $h(y) = f(x_0, y)$, h è derivabile in un intorno di y_0 privato di y_0 stesso e si ha

$$h'(y) = \frac{\left[\frac{1}{y} \ln|1 - x_0 y| + \frac{\ln|x y|}{1 - x y} (-x_0) \right] \sqrt{x_0^2 + y^2} - \frac{\ln|x y| \ln|1 - x y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} y}{x^2 + y^2}$$

e quindi

$$\lim_{y \rightarrow y_0} h'(y) = -\infty \cdot \operatorname{sgn}(y_0)$$

$x_0 y_0 = 0$

(i) $x_0 = y_0 = 0$. f risulta parzialmente derivabile con $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

Si deve quindi studiare

$$\frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\ln|x y| \ln|1 - x y|}{x^2 + y^2} = \frac{x y \ln|x y|}{x^2 + y^2} \frac{\ln|1 - x y|}{x y}$$

poiché il secondo fattore ha limite 1 basta studiare il comportamento del primo fattore, il quale subisce due limiti $\pm \infty$ a seconda del sgn del coeff. angolare.

(ii) $x_0 y_0 = 0, x_0^2 + y_0^2 \neq 0$: La funzione non è differenziabile in (x_0, y_0) dato che non è parzialmente derivabile rispetto y se $y_0 = 0$, rispetto x se $x_0 = 0$. Infatti, se $y_0 = 0$: $\lim_{y \rightarrow 0} h'(y) = +\infty \cdot \operatorname{sgn}(y)$

In tutti i punti di $\mathbb{R}^2 \setminus \{xy=0, xy=1\}$ la differenziabilità segue dal teorema del differenziale totale.