

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\tau = \int_{\substack{\{x^2+y^2 \leq \frac{1}{4}\} \\ z=\frac{1}{2}}} \vec{F} \cdot (0,0,1) dxdy \int_{\substack{\{x^2+y^2 \leq 1\} \\ z=-\frac{1}{2}}} \vec{F} \cdot (0,0,-1) dxdy \\ + \int_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n} d\tau = \int_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n} d\tau$$

Per l'ultimo integrale usando la parametrizzazione trovata in precedenza:

$$\vec{F}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \cdot (\underline{x}_\theta \wedge \underline{x}_z) =$$

$$z(\rho^2 \cos^2 \theta, \rho^2 \sin^2 \theta, \rho^2 \cos \theta \sin \theta) \cdot (\rho \cos \theta + \rho \cos \theta, \rho \sin \theta - \rho \sin \theta, -\rho \rho z) =$$

$$z^2 \rho ( \rho \cos^2 \theta - \rho \sin^2 \theta + \rho (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) - \rho \rho z \cos \theta \sin \theta )$$

Da cui

$$\int_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n} d\tau = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} z^2 \rho [ \rho \cos^2 \theta - \rho \sin^2 \theta + \rho (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) - \rho \rho z \cos \theta \sin \theta ] dz$$

per concludere basta osservare che l'integrale del primo addendo rispetto  $z$  è nullo visto che è una funzione dispari di  $z$ .

Stessa cosa per il secondo addendo.

Per il terzo termine invece si deve osservare che è una funzione periodica di periodo  $\pi$  e dispari e quindi l'integrale nullo rispetto  $\theta$ .

In conclusione:

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\tau = 0$$