

ESERCIZIO 2: Determinare il volume di

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - \sin y)^2 + z^2 \leq \sin^2(y/2), y \in [0, 2\pi]\}$$

Si noti che se si considera il piano $y = y_0, y_0 \in [0, 2\pi]$, l'intersezione di tale piano con E è data dal cerchio

$$(x - \sin y_0)^2 + z^2 \leq \sin^2(y_0/2)$$

che ha centro $(\sin y_0, y_0, 0)$ e raggio $r = |\sin(y_0/2)|$.

Per le formule di riduzione si ottiene quindi:

$$\text{Vol}(E) = \int_0^{2\pi} dy \int_{E(y)} dx dz = \int_0^{2\pi} \text{Area}(E(y)) dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \pi \sin^2(y/2) dy = \pi \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos y}{2} dy = \frac{\pi}{2} \cdot 2\pi = \pi^2$$