

ESERCIZIO 4: Sia  $S = \partial E$  dove

(4)

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^4 + z^4 \leq 1, z \in [-1/2, 1/2]\}$$

e siano

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^4 \leq \frac{15}{16}, z = 1/2\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^4 \leq \frac{15}{16}, z = -1/2\}$$

$$S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^4 + z^4 = 1, z \in [-1/2, 1/2]\}$$

allora  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ .

Chiaramente  $S_1, S_2$  sono superfici regolari, mentre per  $S_3$  una superficie regolare che ha tale insieme come sostegno si trova così:

$$\begin{cases} x = \rho(\theta, z) \cos \theta \\ y = \rho(\theta, z) \sin \theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \rho'(\theta, z) = \frac{1 - z^4}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta}$$
$$\Rightarrow \rho(\theta, z) = \left( \frac{1 - z^4}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta} \right)^{1/4}$$

Poiché  $\rho \in C^1([0, 2\pi] \times [-1/2, 1/2])$  e  $(c = \cos \theta, s = \sin \theta)$

$$\underline{X}_\theta = (\rho_\theta c - \rho s, \rho_\theta s + \rho c, 0)$$

$$\underline{X}_z = (\rho_z c, \rho_z s, 1)$$

$$\Rightarrow \underline{X}_\theta \wedge \underline{X}_z = (\rho_\theta s + \rho c, \rho s - \rho_\theta c, -\rho s z)$$

$$\Rightarrow |\underline{X}_\theta \wedge \underline{X}_z|^2 = \rho_\theta^2 s^2 + \rho^2 + \rho_\theta^2 \neq 0 \text{ essendo } \rho > 0 \forall (\theta, z).$$

Per il calcolo del flusso del campo  $\vec{F} = (x^2 z, y^2 z, x y z)$  uscente da  $S$  si noti che se  $\vec{m}$  indica la normale esterna al  $\partial E$ .