

ESERCIZIO 1. Siano $\gamma \in \mathbb{R}$ e

(1)

$$\omega(x, y) = \frac{x^\gamma}{x^\alpha + y^\gamma} dx + \beta \frac{y^{\gamma-1}}{x^\alpha + y^\gamma} dy.$$

Determinare i valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in modo tale che ω risulti esatto sul suo dominio.

Si noti che a seconda dei segni degli esponenti che compaiono nella definizione di ω il dominio cambia.

Conviene quindi, prima di discutere tutti i casi, restringere l'insieme dei parametri α, β .

Imponiamo ω chiuso visto che risulta sempre di classe C^1 sul suo dominio:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^\gamma}{x^\alpha + y^\gamma} \right) = - \frac{x^\gamma \gamma y^{\gamma-1}}{(x^\alpha + y^\gamma)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta y^{\gamma-1}}{x^\alpha + y^\gamma} \right) = - \frac{\beta y^{\gamma-1} \alpha x^{\alpha-1}}{(x^\alpha + y^\gamma)^2}$$

da cui ω chiuso se e solo se

$$\alpha = \gamma + 1, \quad \beta = \frac{\gamma}{\gamma + 1} \quad (\gamma \neq -1)$$

Per tali valori

$$\omega(x, y) = \frac{x^\gamma}{x^{\gamma+1} + y^\gamma} dx + \frac{\gamma}{\gamma + 1} \frac{y^{\gamma-1}}{x^{\gamma+1} + y^\gamma} dy$$

e la funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{\gamma + 1} \ln |x^{\gamma+1} + y^\gamma|$$