

$$\int_{\gamma_i} \vec{F} \cdot \vec{E} = \int_{\gamma_i} \omega$$

e per il teorema di Stokes, se C_i è il cerchio di raggio S_i dei due, si ha:

$$\iint_{C_i} \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{m}_{C_i} dV = \int_{\gamma_i} \vec{F} \cdot \vec{E} = \pm \int_{\gamma_i} \omega$$

a seconda che $\gamma_i = \partial^+ C_i$ o meno.

Nel primo caso: $\vec{m}_{C_1} = (0, 0, 1)$ e $\gamma_1 = \partial^- C_1$, da cui poiché con un po' di conti si trova:

$$\text{rot} \vec{F} = - \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \vec{i} + \frac{x^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \vec{j} - \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k}$$

si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \omega &= - \iint_{C_1} \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{m}_{C_1} dV = + \frac{S_1^2}{(S_1^2 + \frac{1}{2})^{3/2}} \text{Area}(C_1) = \\ &= + \frac{\pi S_1^4}{(S_1^2 + \frac{1}{2})^{3/2}} \end{aligned}$$

Nell'altro caso poiché $\gamma_2 = \partial^+ C_2$ si ha $\vec{m}_{C_2} = (0, 0, 1)$:

$$\int_{\gamma_2} \omega = \iint_{C_2} \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{m}_{C_2} dV = - \frac{\pi S_2^2}{(S_2^2 + \frac{1}{2})^{3/2}}$$

e quindi in conclusione

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \omega = \pi \left[\frac{S_1^4}{(S_1^2 + \frac{1}{2})^{3/2}} - \frac{S_2^4}{(S_2^2 + \frac{1}{2})^{3/2}} \right]$$