

ESERCIZIO 3:

(5)

Una parametrizzazione del segmento s è data da
 $[-1, 1] \ni t \rightarrow (1, t, 0)$

poiché la rotazione dell'angolo z è data da

$$R(z) = \begin{pmatrix} \cos z & -\sin z \\ \sin z & \cos z \end{pmatrix}$$

una parametrizzazione del segmento s_z è data da:

$$\begin{aligned} [-1, 1] \ni t &\rightarrow \left(R(z) \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, z \right) = \\ &= (\cos z - t \sin z, \sin z + t \cos z, z) \end{aligned}$$

Quindi, una parametrizzazione di Σ è data da

$$[-1, 1] \times [0, 2\pi] \ni (t, z) \rightarrow \varphi(t, z) \in \mathbb{R}^3$$

con

$$\varphi(t, z) = (\cos z - t \sin z, \sin z + t \cos z, z)$$

Poiché:

$$\varphi_t(t, z) = (-\sin z, \cos z, 0)$$

$$\varphi_z(t, z) = (-\sin z - t \cos z, \cos z - t \sin z, 1)$$

si ha

$$\varphi_t \wedge \varphi_z = (\cos z, \sin z, t)$$

$$\Rightarrow \|\varphi_t \wedge \varphi_z\| = \sqrt{1+t^2}$$

e quindi $\Sigma = \varphi([-1, 1] \times [0, 2\pi])$ è il sostegno di una superficie regolare (il fatto che φ sia regolare e iniettiva è ovvio per costruzione)