

# ESERCIZIO 1:

①

Sia  $f(x,y) = \frac{\ln(x+y) - \ln x}{y}$ , allora

$$\text{Dom } f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y > 0, x > 0, y \neq 0\}$$

È facile vedere che se  $x_0 > 0$  allora

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} f(x,y) = \frac{1}{x_0},$$

dato che  $f$  non è altro che il rapporto incrementale della funzione logaritmica.

$$\text{Sia } F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in \text{Dom } f \\ \frac{1}{x} & y=0, x>0 \end{cases}$$

allora  $F$  è  $C^0(\text{Dom } f \cup \{(x,y) : y=0, x>0\})$  e anzi è  $C^1(\text{Dom } f)$ .

Resta quindi da studiare la differenziabilità di  $F$  sulla semiretta  $\{(x,0) : x>0\}$ .

$F$  è parzialmente derivabile nei punti  $(x_0,0)$ ,  $x_0 > 0$ , infatti:

$$F(x,0) = \frac{1}{x} \Rightarrow F_x(x_0,0) = -\frac{1}{x_0^2}.$$

$$F(x_0,y) = \begin{cases} f(x_0,y) & y \neq 0 \\ \frac{1}{x_0} & y=0 \end{cases} \Rightarrow F_y(x_0,0) = -\frac{1}{2x_0^2}.$$

Proviamo che  $F$  è differenziabile nel punto  $(x_0,0)$ :

$$F(x,y) - F(x_0,0) - \nabla F(x_0,0) \cdot (x-x_0, y) =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} + \frac{x-x_0}{x_0^2} + \frac{y}{2x_0^2} & y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{y} \ln\left(\frac{1+y}{x}\right) - \frac{1}{x_0} + \frac{x-x_0}{x_0^2} + \frac{y}{2x_0^2} & y \neq 0 \end{cases}$$