

ESERCIZIO 2

(2)

L'intersezione del cono di equazione $z + \sqrt{x^2 + y^2} = 2$ e del tronco $(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1$ è data da due circonferenze, centro di equazione:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = 2 - z \\ (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = 2 - z \\ 2z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ z = 1/\sqrt{2} \end{cases} \quad \gamma_2) \begin{cases} x^2 + y^2 = \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ z = -1/\sqrt{2} \end{cases}$$

Quindi, due parametrizzazioni che lo orientino nel modo voluto sono date da

$$\begin{cases} x = \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cos \theta \\ y = -\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sin \theta \\ z = 1/\sqrt{2} \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad \begin{cases} x = \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cos \theta \\ y = \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sin \theta \\ z = -1/\sqrt{2} \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Per calcolare l'integrale di ω su γ_1, γ_2 si può procedere in vari modi: direttamente, vedendo γ_1, γ_2 come bordo del tronco di cono $z + \sqrt{x^2 + y^2} = 2$ compreso tra i piani $z = 1/\sqrt{2}$, $z = -1/\sqrt{2}$ e applicando il Teorema di Stokes; o vedendo γ_1, γ_2 come bordo del cerchio $x^2 + y^2 \leq \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$, $z = 1/\sqrt{2}$, $x^2 + y^2 \leq \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$, $z = -1/\sqrt{2}$, rispettivamente, e di nuovo utilizzando il Teorema di Stokes.

Procediamo nell'ultimo modo: sia $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x - y - z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \frac{y - x - z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \frac{z - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

allora: