

ESERCIZIO 4:

④

Siano C_1 l'interno del cilindro $\frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$ e C_2 l'interno del cilindro $\frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$, rispettivamente.

Si cerca quindi il volume di $C_1 \cap C_2$.

Sia $(x, y, z) \in C_1 \cap C_2$, allora:

$$(x, y, z) \in C_1 \Leftrightarrow |y| \leq 2 \sqrt{1 - \frac{z^2}{9}}$$

$$(x, y, z) \in C_2 \Leftrightarrow |x| \leq 5 \sqrt{1 - \frac{z^2}{9}}$$

Quindi, $\forall z_0 \in \mathbb{R}$ l'intersezione del piano $z = z_0$ con $C_1 \cap C_2$ è il rettangolo R_{z_0} dato da:

$$R_{z_0} = \left\{ (x, y, z) : z = z_0, |x| \leq 5 \sqrt{1 - \frac{z_0^2}{9}}, |y| \leq 2 \sqrt{1 - \frac{z_0^2}{9}} \right\}$$

Imponendo $1 - \frac{z^2}{9} \geq 0$ si ha $|z| \leq 3$.

Per la formula di riduzione si ha:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(C_1 \cap C_2) &= \int_{-3}^3 \text{Area}(R_z) dz = 10 \int_{-3}^3 \left(1 - \frac{z^2}{9}\right) dz \\ &= 10 \left(6 - \frac{2}{27} \cdot \frac{1}{3}\right) = 40 \end{aligned}$$