$\boxed{\text{ESERCIZIO 1:}}$ Siano $m, n \in \mathbb{N}$ e

$$\omega(x,y) = \left(n x^{n-1} y^{2m} - 2m \frac{y^{5m}}{x^{2m+1}}\right) dx + \left(2m\, x^{n} y^{2m-1} + 5m \frac{y^{5m-1}}{x^{2m}}\right) dy$$

Si ha $\mathrm{Dom}\,\omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : x = 0\}$ e ω è di classe C^1 sul suo dominio se $n, m \neq 0$.

Condizione necessaria affinché ω risulti esatta è che sia chiusa:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial y} = 2n^2 x^{n-1} y^{2m-1} - 10 n^2 \frac{y^{5n-1}}{x^{2n+1}}$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x} = 2m^2 x^{m-1} y^{2m-1} - 10 m^2 \frac{y^{5m-1}}{x^{2m+1}}$$

e quindi ω è chiusa se $m = n$.
Questo è l'unico caso possibile, infatti

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial y}(1,y) = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}(1,y) \iff$$

$$2n^2 y^{2n-1} - 10 n^2 y^{5n-1} = 2m^2 y^{2m-1} - 10 m^2 y^{5m-1}$$

e questo accade se e solo se $m = n$.

Se $m = n$ ω risulta essere omogenea di grado $3m-1$ sul cono $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : x = 0\}$ e quindi è esatta se $3m-1 \neq -1$ essendo ivi chiusa applicando il Thm di Eulero.
Inoltre, in ognuna delle due componenti connesse di $\mathrm{Dom}\,\omega$ le primitive sono date a meno di una costante da:

$$f(x,y) = \frac{1}{3m-\cancel{1+1}} \big(\omega_1(x,y), \omega_2(x,y)\big) \cdot (x,y) =$$

$$= \frac{1}{3m} \left(m x^{m} y^{2m} - 2m \frac{y^{5m}}{x^{2m}} + 2m\, x^{m} y^{2m} + 5m \frac{y^{5m}}{x^{2m}}\right)$$