ESERCIZIO 3. La curva γ di eq.ni cartesiane

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ 16x^2+4y^2+z^2=16 \\ z\geq 0 \end{cases}$$

può essere considerata come bordo della calotta sferica S data da

$$\{5x^2+y^2\leq 4\} \ni (x,y) \longrightarrow \left(x,y,\sqrt{4-(x^2+y^2)}\right)$$

e quindi la circuitazione del campo $\vec{F}$ si può calcolare mediante il Thm di Stokes:

$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ zx^2y-y^4 & zy^2x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -y^2x\,\underline{i} + x^2y\,\underline{j} + \left(zy^2-zx^2+4y^3\right)\underline{k}$$

da cui

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot\tau = \iint_S \text{rot}\,\vec{F}\cdot\nu\, d\sigma \overset{\nu(xyz)=\frac{(xyz)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{=}$$

$$= \iint_{\{(xy):\ 5x^2+y^2\leq 4\}=:E} \left(z^2(y^2-x^2)+4zy^3\right)dx\,dy$$

Si noti che se $(xy)\in E \Rightarrow (x,-y)\in E$ e che la funzione $g(xy)=z(xy)y^3$ è + c.

$$g(x,-y)=z(x,-y)(-y)^3=-z(xy)y^3=-g(xy)$$

e quindi $\displaystyle\iint_E z(xy)y^3\,dx\,dy=0$