e quindi se $\Phi(x';y';z') = (x', 2y', z')$ si ha

$$\mathrm{Vol}(E) = \iiint_{E'} 2 \, dx'dy'dz' = 2 \cdot \mathrm{Vol}(E')$$

con $E' = \Phi^{-1}(E)$ e quindi dato dall'intersezione dei cilindri pieni: $(x')^2+(y')^2 \leq 1$, $(x')^2+(y'-z')^2 \leq 1$

Con questo cambio di coordinate E_z è diventato

$$E'_z = \{(x')^2+(y')^2 \leq 1\} \cap \{(x')^2+(y'-z')^2 \leq 1\}$$

da cui:

$$\mathrm{Area}(E'_z) = \int_{-\alpha(z)}^{\alpha(z)} \left[\sqrt{1-(x')^2} - \left(z - \sqrt{1-(x')^2}\right)\right] dx'dy' =$$

$$= -2z\,\alpha(z) + 2\arcsin\alpha(z) + 2\alpha(z)\sqrt{1-\alpha^2(z)}$$

dove $\alpha(z)$ è l'ascissa del punto d'intersezione delle circonferenze $(x')^2+(y')^2 = 1$, $(x')^2+(y'-z')^2 = 1$ che sta nel semipiano $x' \geq 0$, i.e., $\alpha(z) = \sqrt{1-\left(\frac{z}{2}\right)^2}$.

Quindi resta da determinare z_0, per fare ciò basta imporre che l'ordinata del punto di cui sopra sia massima: $(\alpha(z), \beta(z))$ t.c. $\beta(z) = \frac{z}{2}$, $\beta(z) \leq 1$ $\Rightarrow z \leq 2 = z_0$.

Allora:

$$\mathrm{Vol}(E) = 2\,\mathrm{Vol}(E') = 4 \int_0^2 2\left[\arcsin\alpha(z) + \alpha(z)\left(\sqrt{1-\alpha^2(z)} - z\right)\right]$$

$$= 8 \int_0^2 \left[\arcsin\left(\sqrt{1-\left(\frac{z}{2}\right)^2}\right) - \frac{z}{2}\sqrt{1-\left(\frac{z}{2}\right)^2}\right] dz =$$

$$= 16 \int_0^1 \left[\arcsin\sqrt{1-t^2} - t\sqrt{1-t^2}\right] dt =$$

$$= 16\left[1 + \frac{1}{3}\left(2^{3/2}-1\right)\right] = \frac{32}{3}\left(1+\sqrt{2}\right)$$