ESERCIZIO 4: Sia $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1,\ z\le 0\}$
e sia $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\le 0\}$.

Allora, $\partial B = S\cup T$ con $T=B\cap\{z=0\}$.

Ricordando che la divergenza del rotore di un campo regolare è identicamente nulla dal teorema della Divergenza segue

$$\int_{\partial B} \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n}\, d\sigma = 0$$

dove $\vec{n}$ è la normale esterna a ∂B.

Quindi, orientando S in modo tale che il suo versore normale coincida con $\vec{n}$, si ha

$$\int_S \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n}\, d\sigma = -\int_T \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n}\, d\sigma$$

D'altra parte, $\vec{n}|_T \equiv (0,0,1)$ e poiché

$$\mathrm{rot}\,\vec{F}(x,y,z)\equiv(0,0,+1)$$

segue

$$\int_S \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n}\, d\sigma = -\mathrm{Area}(T) = -\pi.$$