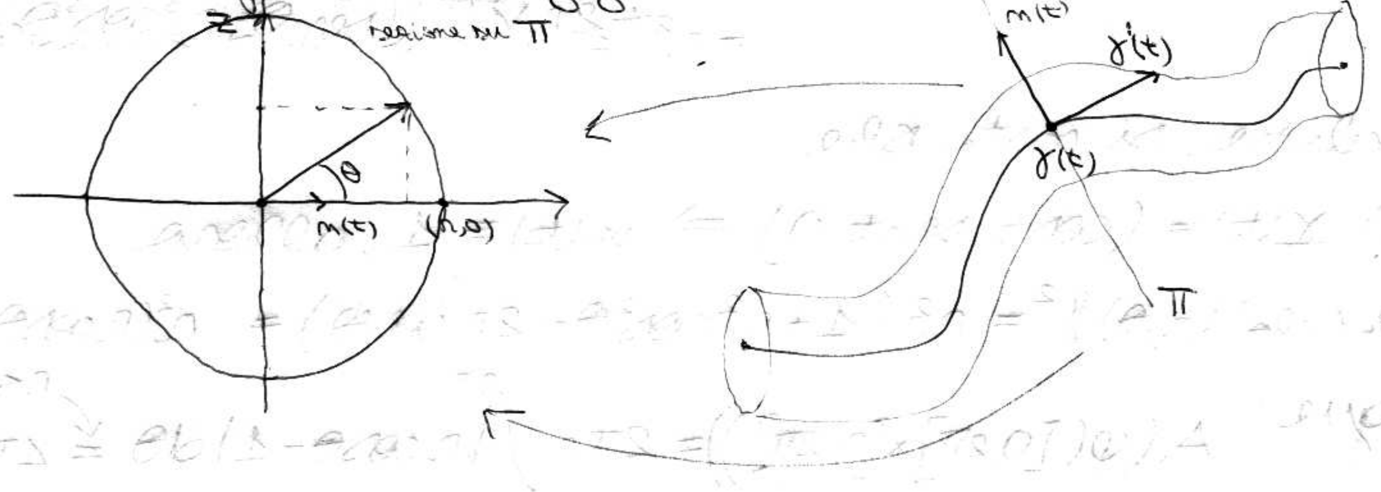
ESERCIZIO 3: Sia $\varphi: [0,\ell]\times[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$\varphi(t,\theta) = (\alpha(t) - r\beta'(t)\cos\theta, \beta(t) + r\alpha'(t)\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$$

Si noti che se $\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t), 0)$, allora il vettore normale alla curva (pensata come curva in $\mathbb{R}^2$) è dato da $\underline{n}(t) = (-\beta'(t), \alpha'(t), 0)$, da cui

$$\varphi(t,\theta) = \gamma(t) + r\cos\theta\,\underline{n}(t) + r\,\text{sen}\,\theta\,\underline{k}.$$

Quindi, φ ha come immagine un intorno tubolare della curva γ, più precisamente l'intersezione di $\varphi([0,\ell]\times[0,2\pi])$ con il piano per $\gamma(t)$ di vettore normale $\gamma'(t)$ è ~~la~~ circonferenza di centro $\gamma(t)$ e raggio r.



Dato per buono che per r sufficientemente piccolo φ è una superficie regolare, il suo versore normale si ottiene così:

$$\varphi_t(t,\theta) = \gamma'(t) + r\cos\theta\,\underline{n}'(t)$$

$$\varphi_\theta(t,\theta) = -r\,\text{sen}\,\theta\,\underline{n}(t) + r\cos\theta\,\underline{k}$$

$$(\varphi_t \wedge \varphi_\theta)(t,\theta) = -r\,\text{sen}\,\theta\,\underline{k} - r\cos\theta\,\underline{n}(t) + \\ - r^2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta\,\underline{n}'(t)\wedge\underline{n}(t) + r^2\cos^2\theta\,\underline{n}'(t)\wedge\underline{k}$$