ESERCIZIO 2: Sia

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1, \quad z \leq 1 - \sqrt{x^2+y^2} \right\}$$

quindi E è la regione di spazio interna al cilindro di asse l'asse y e direttrice la circonferenza $x^2+z^2=1, y=0$, e al cono circolare di vertice $V \equiv (0,0,1)$ e asse l'asse z.

Ogni punto interno al cono in questione si ottiene come:

$$(x,y,z) = (1-t)V + t(\rho\cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta, 0) =: \Phi(t,\rho,\theta)$$

con $(t,\rho,\theta) \in \mathbb{R} \times [0,1] \times [0,2\pi]$. Più esplicitamente

$$\begin{cases} x = t\rho\cos\theta \\ y = t\rho\operatorname{sen}\theta \\ z = 1-t \end{cases}$$

imponendo che tale punto sia interno al cilindro di cui sopra:

$$t^2\rho^2\cos^2\theta + (1-t)^2 \leq 1 \iff t\left((1+\rho^2\cos^2\theta)t - 2\right) \leq 0$$

$$\iff \quad 0 \leq t \leq \frac{2}{1+\rho^2\cos^2\theta}$$

Quindi $E = \Phi(\tilde{E})$, dove

$$\tilde{E} = \left\{ (t,\rho,\theta) \in \mathbb{R} \times [0,1] \times [0,2\pi] : 0 \leq t \leq \frac{2}{1+\rho^2\cos^2\theta} \right\}$$

da cui

$$\operatorname{vol}(E) = \int_{\tilde{E}} |J_\Phi(t,\rho,\theta)| \, dt\, d\rho\, d\theta = \int_{\tilde{E}} t^2\rho \, dt\, d\rho\, d\theta$$