Per concludere si noti che $\|\gamma'(t)\| = 1 \Rightarrow \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' = 0$
e
$$\underline{n}'(t) = (-\beta''(t), \alpha''(t), 0) \Rightarrow \underline{n}'(t) \parallel \gamma'(t)$$
e cioè $k(t) = -\underline{n}'(t) \cdot \gamma'(t) = \beta''(t)\alpha'(t) - \beta'(t)\alpha''(t)$.
Allora:
$$\underline{n}'(t) \wedge \underline{n}(t) = -k(t)\,\underline{k} \ ; \ \underline{n}'(t) \wedge \underline{k} = k(t)\,\underline{n}(t)$$

Segue:
$$(\varphi_t \wedge \varphi_\theta)(t,\theta) = (-r\cos\theta + r^2\cos^2\theta\, k(t))\,\underline{n}(t) + (-r\,\mathrm{sen}\,\theta + k(t) r^2 \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)\,\underline{k}$$

e quindi
$$\|(\varphi_t \wedge \varphi_\theta)(t,\theta)\|^2 = r^2 + r^4 k^2(t)(\cos^4\theta + \mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta) - 2r^3 k(t)(\cos^3\theta + \mathrm{sen}^2\theta\cos\theta)$$
$$= r^2(1 + r^2k^2(t)\cos^2\theta - 2r\,k(t)\cos\theta)$$

Infine, si noti che

(a) $\gamma(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\,t, 0) \Rightarrow k(t) \equiv 1$, allora
$$\|(\varphi_t \wedge \varphi_\theta)(t,\theta)\|^2 = r^2(1 + r^2\cos^2\theta - 2r\cos\theta) = r^2(r\cos\theta - 1)^2$$
segue:
$$A(\varphi([0,2\pi]\times[0,2\pi])) = 2\pi r \int_0^{2\pi} |r\cos\theta - 1|\, d\theta \overset{r<1}{=} 4\pi^2 r$$

In questo caso, infatti, l'immagine di φ è il toro ottenuto ruotando attorno l'asse z la circonferenza:
$$\begin{cases} x = 1 - r\cos\theta \\ z = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y = 0 \end{cases}$$

(b) $\gamma(t) = (t/\sqrt{2}, t/\sqrt{2}, 0) \Rightarrow k(t) \equiv 0$, allora
$$\|(\varphi_t \wedge \varphi_\theta)(t,\theta)\| = r$$
segue: $A(\varphi([0,1]\times[0,2\pi])) = 2\pi r$

In questo caso, infatti, l'immagine di φ è un tronco di cilindro circolare retto di raggio r e altezza 1.