ESERCIZIO 1: Sia $f_k(x,y) = e^{\ln^k|xy|}$, allora
$$\mathrm{Dom} f_k = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy\neq 0\}$$
ed $f_k \in C^1(\mathrm{Dom} f_k)$.

Il caso più semplice è $k=0$ per cui $f_0(x,y)\equiv e$ che quindi ha chiaramente risposta positiva.
Distinguiamo due casi:

k pari: se (x_0,y_0) t.c. $x_0 y_0 = 0$ si ha
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_k(x,y) = +\infty$$
dato che $x\cdot y \to 0$ per $(x,y)\to(x_0,y_0)$ e $\lim_{t\to 0} e^{\ln^k|t|} = +\infty$.
In questo caso f_k non può essere prolungata neanche in modo continuo a tutto $\mathbb{R}^2$!

k dispari: stavolta $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_k(x,y) = 0$ poiché in questo caso $\lim_{t\to 0} e^{\ln^k|t|} = 0$.

La funzione
$$F_k(x,y) = \begin{cases} f_k(x,y) & xy\neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$$
è $C^0(\mathbb{R}^2)$.
Si ha per (x,y) t.c. $x^2+y^2\neq 0$: $\frac{\partial F_k}{\partial x}(x,y) = \frac{k}{x}\ln^{k-1}|xy|\, e^{\ln^k|xy|}$,
e posto $g_k(t) = \frac{k}{t}\ln^{k-1}|t|\, e^{\ln^{k-1}|t|} = k\ln^{k-1}|t|\, e^{\ln^{k-1}|t| - \ln t}\,\mathrm{sgn}\, t$
si ottiene:
$$\frac{\partial F_k}{\partial x}(x,y) = y\, g_k(xy)$$
analogamente per tali punti $\frac{\partial F_k}{\partial y}(x,y) = x\, g_k(xy)$.
D'altra parte, se $k>1$ $\lim_{t\to 0} g_k(t) = 0$, da cui
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\partial F_k}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\partial F_k}{\partial y}(x,y) = 0$$
e quindi $F_k \in C^1(\mathbb{R}^2)$.
Se invece $k=1$: $\lim_{t\to 0^\pm} g_1(t) = \pm 1$, quindi F_k non è parzialmente derivabile rispetto y (x) nei punti del tipo $(x_0,0)$ ($(0,y_0)$) come era ovvio notare da $F_1(x,y) = |xy|$.