ESERCIZIO 5

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{4x}{1+x^2} y' + 24x(1+x^2)^2\sqrt{y'} \\ y'(0) = v_0 \geq 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

L'equazione ha senso sse $y' \geq 0$, quindi le eventuali sol. sono non decrescenti, inoltre poiché

$$y'' = x\left(\frac{4y'}{1+x^2} + (1+x^2)^2\sqrt{y'}\right)$$

si ha

$y'' \geq 0$ se $x \geq 0 \Rightarrow y$ convessa per gli x positivi dell'intervallo di esistenza

$y'' \leq 0$ se $x \leq 0 \Rightarrow y$ concava per gli x negativi dell'intervallo di esistenza

Posto $v = y'$ l'equazione si riduce ad una equazione di Bernoulli per v:

$$v' = \frac{4x}{1+x^2} v + 12x(1+x^2)^2\sqrt{v}$$

con

$$v(0) = v_0$$

La soluzione esiste unica localmente se $v_0 > 0$ per il Thm di Cauchy-Lipschitz.

Se $v_0 = 0 \Rightarrow v(x) \equiv 0 \Rightarrow y(x) \equiv c$ con $0 = y(0) = c$

$\Rightarrow y(x) \equiv 0$ è soluzione.

Per $v_0 > 0$ ponendo $z = \sqrt{v}$ si ottiene una equazione lineare in z: