ESERCIZIO 2:

L'idea è scambiare il simbolo di serie e quello di integrale. Per poter fare ciò è sufficiente provare la convergenza uniforme della serie

$$\sum_{n\geq 0} x^{2n+1}\ln^5(1-x^2)$$

nell'intervallo $[0,e^{-1}]=I$.

In tale intervallo la serie è a termini negativi ($1-x^2\leq 1 \Rightarrow \ln^5(1-x^2)\leq 0$) ed inoltre

$$x^{2n+1}\ln^5(1-e^{-2})\leq x^{2n+1}\ln^5(1-x^2)\leq 0$$

La serie $\sum x^{2n+1}\ln^5(1-e^{-2})$ converge totalmente su I, da ciò segue la convergenza totale per la serie iniziale.

Allora:

$$\sum_{n\geq 0}\int_0^{e^{-1}} x^{2n+1}\ln^5(1-x^2)\,dx = \int_0^{e^{-1}}\sum_{n\geq 0} x^{2n+1}\ln^5(1-x^2)\,dx$$

$$= \int_0^{e^{-1}} x\ln^5(1-x^2)\Big(\sum_{n\geq 0} x^2\Big)\,dx =$$

$$= \int_0^{e^{-1}} x\,\frac{\ln^5(1-x^2)}{1-x^2}\,dx = -\int_1^{1-e^{-2}}\frac{1}{2}\,\frac{\ln^5 t}{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\Big[\ln^6 t\Big]_{1-e^{-2}}^{1} = -\frac{1}{12}\ln^6(1-e^{-2})$$