$$z' = \frac{2x}{(1+x^2)} z + 12x(1+x^2)^2$$

con $z(0) = \sqrt{v_0}$.

L'unica soluzione è data da

$$z(x) = (1+x^2)\left(\sqrt{v_0} + \int_0^x 12t \frac{(1+t^2)^{\cancel{2}}}{\cancel{1+t^2}}\, dt\right) =$$

$$= (1+x^2)\left(\sqrt{v_0} + 6x^2 + 3x^4\right)$$

Si noti che $z(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, da cui:

$$y'(x) = v(x) = z^2(x) = (1+x^2)^2\left(\sqrt{v_0} + 6x^2 + 3x^4\right)^2$$

$$\Rightarrow y(x) = \int_0^x \Big(9t^{12} + 54t^{10} + (45 + 6\sqrt{v_0})t^8 + (180 + 12\sqrt{v_0})t^6 + (36 + 30\sqrt{v_0} + v_0)t^4 + (2v_0 + 12\sqrt{v_0})t^2 + v_0\Big)\, dt$$

$$= \frac{9}{13}x^{13} + \frac{54}{11}x^{11} + \left(5 + \frac{2}{3}\sqrt{v_0}\right)x^9 + \frac{180 + 12\sqrt{v_0}}{7}x^7 + \frac{36 + 30\sqrt{v_0} + v_0}{5}x^5 + \left(\frac{2}{3}v_0 + 4\sqrt{v_0}\right)x^3 + v_0 x$$

Se $v_0 > 0$, poiché $y'(x) \geq v_0$ la sol. è unica.

Se $v_0 = 0$, ci sono almeno due sol. $y_0(x) \equiv 0$ e

$y_1(x) = \frac{9}{13}x^{13} + \frac{54}{11}x^{11} + 5x^9 + \frac{180}{7}x^7 + \frac{36}{5}x^5$.

Si noti che $y_2(x) = y_1(x)$ $x > 0$ e $y_0(x)$ $x \leq 0$ e $y_3(x) = y_0(x)$ $x > 0$ e $y_1(x)$ $x \leq 0$ sono sol.ni.

In realtà ci sono infinite sol.ni.