ESERCIZIO 4

$$f(x,y) = -6xy^2 + 2x^3 - 4y^3 + 3x^2 + 6xy + 3y^2 + 12$$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, poiché $f(x,0) = 2x^3 + 3x^2 + 12$

si ha:
$$\inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty \qquad \sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$$

La ricerca degli estremi relativi:

$$\nabla f(x,y) = \left(-6y^2 + 6x^2 + 6x + 6y,\ -12xy - 12y^2 + 6x + 6y\right)$$

da cui

$$\nabla f(x,y) = \underline{0} \iff \begin{cases} 6(x+y)(1+x-y) = 0 \\ 6(x+y)(1-2y) = 0 \end{cases} \iff$$

$y = -x$ o $x = -\frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$ che ricade nel caso precedente.

Poiché $y = -x$ è una curva regolare di punti critici:
$$\det \nabla^2 f(x,-x) = 0$$
$$f(x,-x) = 12$$

Si procede con lo studio per sezioni verticali:

$\varphi_k(y) = f(k,y)$ t.c. $\varphi_k'(y) > 0 \iff$

$y < \frac{1}{2}$ $y > -k$ se $k < -\frac{1}{2}$ (VEDI FIGURA)

$y < -k$ $y > \frac{1}{2}$ se $k > -\frac{1}{2}$