ESERCIZIO 3 Se $y = \frac{1}{2} - \cos x$, la serie è una serie di potenze, quindi posso restringermi allo studio della convergenza assoluta senza perdere di generalità.
Si noti che:

$$a_n = e^{-2n}\left(2n + \ln(1+e^{-2n})\right) = \frac{\ln(1+e^{2n})}{e^{2n}}$$

Applicando il Cr. del Rapporto alla successione $a_n|y|^{n^3}$ si ha

$$\frac{a_{n+1}|y|^{(n+1)^3}}{a_n|y|^{n^3}} = \frac{1}{e^2}\underbrace{\frac{\ln(1+e^{2(n+1)})}{\ln(1+e^{2n})}}_{\to 1}|y|^{3n^2+3n+1}$$

che ha limite finito sse $|y| \le 1$.
In tal caso, il limite è minore di 1, quindi la serie è convergente.
Da cui:

$$\sum a_n y^n \quad \text{converge sse } |y| \le 1$$

$$\Rightarrow \sum a_n\left(\frac{1}{2}-\cos x\right)^n \quad '' \quad '' \text{ sse } \left|\frac{1}{2}-\cos x\right| \le 1$$

$$\iff -\frac{1}{2} \le \cos x \le 1 \iff x \in \left[0, \frac{2}{3}\pi\right] \cup \left[\frac{4}{3}\pi, 2\pi\right] + 2k\pi$$

$$= \left[0, \frac{2}{3}\pi\right] + k \cdot \frac{4}{3}\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

La convergenza è totale negli intervalli del tipo $|y| \le 1-\delta$, $\delta > 0$, per i teoremi sulle serie di potenze, ma la convergenza è totale su tutto $|y| \le 1$ per confronto con la serie di $b_n = e^{-2n}\ln(1+e^{2n})$.