

## ESERCIZIO 2:

①

$$(C) \begin{cases} y' = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} g(x) = g(xy) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

con  $g(x) = |x| \ln |x|$  se  $x \neq 0$  e  $g(0) = 0$ .  
L'O.D.E. è a variabili separabili con  $g$  di classe  $C^0(\mathbb{R}^2)$  e loc. te. lipschitziana in  $y$  uniformemente in  $x$ . Inoltre, si ha

$$|g(xy)| \leq |g(x)|$$

e quindi applicando il thm di  $\exists!$  globale sulla striscia  $[-R, R] \times \mathbb{R}$ ,  $\forall R > 0$ , si deduce l'esistenza e l'unicità su tutto  $\mathbb{R}$  della soluzione di (C) di classe  $C^1(\mathbb{R})$ .

Si nota che  $z(x) = -y(-x)$  è t.c.

$$\begin{cases} z'(x) = -y'(-x) = -g(-x, y(-x)) = g(x, \underbrace{-y(-x)}_{z(x)}) \\ z(0) = -y_0 \end{cases}$$

quindi si può supporre  $y_0 \geq 0$ .

Per  $y_0 = 0$  la sol. me di (C) è data da  $y(x) \equiv 0$ , da cui:

$$y_0 > 0 \Rightarrow y(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

da cui:

$$y' > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]^c$$

segue:

$$y \searrow \quad x \in (-1, 1)$$

$$y \nearrow \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$x = -1 \quad \text{max rel}$$

$$x = 1 \quad \text{min rel}$$