

ESERCIZIO 4

(1)

$$f(x, y) = (x+y)^2 (4x^2 + y^2 - 10)$$

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 8 \leq 4x^2 + y^2 \leq 12\}$$

L'insieme E è compatto quindi per il Thm di Weierstrass $\exists \max_E f, \min_E f$.

Studiamo separatamente il comportamento di f su

$$\overset{\circ}{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 8 < 4x^2 + y^2 < 12\}$$

$$\partial E = \underbrace{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 8\}}_{A =} \cup \underbrace{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 12\}}_{B =}$$

Poiché $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ i punti estremanti di f su $\overset{\circ}{E}$ sono tutti punti critici:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2(x+y)(4x^2 + y^2 - 10) + (x+y)^2 \cdot 8x = 0 \\ f_y(x, y) = 2(x+y)(4x^2 + y^2 - 10) + (x+y)^2 \cdot 2y = 0 \end{cases}$$

Da cui $\exists x+y=0$ o $x+y \neq 0$

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 10 + 4x(x+y) = 0 \\ 4x^2 + y^2 - 10 + y(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + y^2 - 10 + y(x+y) = 0 \\ 4x(x+y) = y(x+y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{4} \\ y = 4x \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 2\right), \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$$

Ma tali punti non appartengono ad E , quindi non interessa determinarne la natura.

Infatti: $4x^2 + y^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} + 4 = 5$.