

ESERCIZIO 1

$$\sum_{m \geq 0} \overbrace{(m!)^3 \operatorname{tg}\left(\frac{e^{2m}}{m!}\right) \left(1 - \cos\left(\frac{1}{m!}\right)\right)}^{a_m} e^{-m} e^x$$

Sia $y = e^{-e^x}$, allora la serie in questione è una serie di potenze nella variabile y .

Per determinare il raggio di convergenza della serie si osserva che se

$$b_m = \frac{e^{2m}}{2}$$

si ha

$$\frac{a_m}{b_m} \rightarrow 1$$

b_m si ottiene dai limiti notevoli:

$$\operatorname{tg} x \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 1, \quad \frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

e osservando che $\frac{e^{2m}}{m!} \rightarrow 0 \quad m \rightarrow +\infty$.

Quindi:

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} \cdot \frac{b_m}{a_m} \cdot \frac{b_{m+1}}{b_m}$$

cioè le serie $\sum a_m y^m$, $\sum b_m y^m$ hanno lo stesso raggio di convergenza.

Per b_m si ha:

$$b_m^{\frac{1}{m}} \rightarrow e^2$$

Da cui $R = e^{-2}$, la serie converge univ. e uniformemente se $y \in [-e^{-2} + \varepsilon, e^{-2} - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, e puntualmente se $y \in (-e^{-2}, e^{-2})$.