

$\det \nabla^2 f(x, -x) = 0$, e quindi si possono sfruttare le condizioni necessarie di massimalità / minimalità.

Sia $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ e $g_{\gamma_0}(x) = f(x, \gamma_0)$, allora

$$\begin{aligned} g'_{\gamma_0}(x) &= f_x(x, \gamma_0) = 2(x + \gamma_0)(4x^2 + \gamma_0^2 - 10) + (x + \gamma_0)^2 \cdot 8x \\ &= 2(x + \gamma_0) (4x^2 + \gamma_0^2 - 10 + 4x(x + \gamma_0)) \end{aligned}$$

poiché: $\lim_{x \rightarrow -\gamma_0} (4x^2 + \gamma_0^2 - 10 + 4x(x + \gamma_0)) = 5\gamma_0^2 - 10$

il segno di g'_{γ_0} è determinato da quello di $x + \gamma_0$ e $5\gamma_0^2 - 10 \neq 0$. Più precisamente $\exists \varepsilon_{\gamma_0} > 0$ t.c.

$$\begin{aligned} g'_{\gamma_0} &> 0 \text{ se } \varepsilon_{\gamma_0} > x + \gamma_0 > 0 \text{ per } |\gamma_0| > \sqrt{2} \\ g'_{\gamma_0} &< 0 \text{ se } -\varepsilon_{\gamma_0} < x + \gamma_0 < 0 \text{ per } |\gamma_0| > \sqrt{2} \end{aligned} \quad (*)$$

Le disuguaglianze opposte se $|\gamma_0| < \sqrt{2}$ e

$$g'_{\gamma_0} < 0 \text{ se } \gamma_0 + x \neq 0 \text{ per } |\gamma_0| = \sqrt{2}$$

Dall'ultima segue $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ punti di sella.

Se $|\gamma_0| < \sqrt{2} \Rightarrow (-\gamma_0, \gamma_0)$ punto di max rel. dato che in un intorno di tale punto il segno di $f_x(x, \gamma)$ è dato da quello di $x + \gamma$ essendo

$$\lim_{(x, \gamma) \rightarrow (-\gamma_0, \gamma_0)} (4x^2 + \gamma^2 - 10 + 4x(x + \gamma)) = 5\gamma_0^2 - 10 < 0$$

e quindi la tesi da (*).

Analogamente: $|\gamma_0| > \sqrt{2} \Rightarrow (-\gamma_0, \gamma_0)$ punto di min relativo.