

ESERCIZIO

Trovare la somma della serie

$$\sum_{n \geq 1} (n+1)^2 x^n$$

È facile vedere che la serie di potenze in questione ha raggio di convergenza $\rho = 1$ e che per $|x| = 1$ la serie non converge.

Poiché:

$$\sum_{n \geq 0} x^{n+1} = x \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{x}{1-x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \sum_{n \geq 0} x^{n+1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) x^n = \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{1-x} \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} (n+1) x^{n+1} = x \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{1-x} \right) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \sum_{n \geq 0} (n+1) x^{n+1} = \sum_{n \geq 0} (n+1)^2 x^n = \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} (n+1)^2 x^n = \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} (n+1)^2 x^n = \frac{1+x}{(1-x)^3} - 1$$