CORSO di LAUREA in FISICA
ANALISI MATEMATICA 2A e 2B

Prova Scritta

29 Settembre 2004

Risolvere almeno due dei seguenti esercizi:

1. Discutere la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = n \ln^{1/2}\left(1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2\right).$$

2. Determinare l'integrale generale dell'O.D.E.

$$x^3 y''' + 3x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2 \ln|x|.$$

Inoltre, trovare fra le soluzioni quelle che hanno la maggiore regolarità.

3. Studiare l'andamento qualitativo delle soluzioni del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \exp(y^2 - x^2) \\ \\ y(x_o) = 0. \end{cases}$$

4. Determinare massimi e minimi relativi e assoluti della funzione

$$f(x,y) = (1 + xy)\frac{e^{x^2+y^2}}{x^2 + y^2}$$

sull'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Risolvere almeno uno dei seguenti esercizi:

5. Sia $\omega(x,y) = g(x,y)dx + g(y,x)dy$, dove

$$g(x,y) = ye^{\frac{xy}{x^2+y^2}}\left(1 + xy\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\right).$$

Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove γ è la curva del piano di equazioni cartesiane $x^6 + y^8 = 2$ orientata in senso antiorario.

6. Dato $\alpha \neq 0$ sia $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}$ "*α-omogenea*", i.e., $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$ per ogni $t > 0$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Provare che

$$f(x,y) = \frac{1}{\alpha}\left(f_x(x,y)x + f_y(x,y)y\right).$$

Sia ω una forma differenziale di classe C^1 definita su $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ con componenti β-omogenee, $\beta \neq -1$. Provare che ω chiusa implica ω esatta con primitive date da

$$F(x,y) = \frac{1}{\beta + 1}\left(\omega_1(x,y)x + \omega_2(x,y)y\right) + c.$$