CORSO di LAUREA in FISICA
ANALISI MATEMATICA 2A
Prova Scritta
27 Marzo 2003

1. Dato $\alpha \in \mathbf{R}$, sia

$$\omega_\alpha(x,y) = \frac{x}{|x^2+y^2-1|^\alpha}dx + \frac{y}{|x^2+y^2-1|^\alpha}dy.$$

Trovare i valori del parametro α per cui la forma ω_α risulta esatta sul suo dominio e dare una formula per le primitive.

2. Determinare l'area della regione del piano delimitata dalla curva di equazione

$$(x^2+y^2)^3 - 2x^2y^2 = 0.$$

3. Calcolare la circuitazione del campo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (-2xz - 4y^2 + 9z^2 + yze^{xyz}; x^2 + 8yz + 9z^2 + xze^{xyz}; xye^{xyz})$$

lungo la curva intersezione dell'ellissoide $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$ con il piano π di equazione $x + y + z = 1$.

4. Sia $W : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann e dispari. Provare che se $Q \subseteq \mathbf{R}^2$ è un dominio limitato e misurabile tale che $(x,y) \in Q \iff (y,x) \in Q$, allora per ogni $\varphi \in C^0(\mathbf{R})$ si ha

$$\iint_Q W(x-y)\varphi(x)\varphi(y)dxdy = 0.$$

(Sugg.to: il dominio Q è invariante per la simmetria assiale rispetto la retta $y = x$.)

Quindi calcolare

$$\iint_{\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: |y+x|\le 1;\ |y-x|\le 1\}} \left(x^2y^2\sin^3(x-y)\cos^8(x-y)e^{|x-y|^5} + |x-y|^2\right)dxdy.$$

5. Provare che

(a) se $S \subseteq \mathbf{R}^3$ è il sostegno di una superficie regolare con bordo, $f \in C^1(A)$, $\mathbf{G} \in C^1(A;\mathbf{R}^3)$, con $A \subseteq \mathbf{R}^3$ aperto contenente S, allora

$$\int_S f \mathrm{rot}\mathbf{G}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma + \int_S (\nabla f \wedge \mathbf{G})\cdot\mathbf{n}\, d\sigma = \int_{\partial^+ S} f\mathbf{G}\cdot\mathbf{t}\, ds,$$

dove $\mathbf{n}$ è il campo normale ad S, $\mathbf{t}$ è il vettore tangente a ∂S orientato nel verso positivo corrispondente all'orientamento della superficie di sostegno S, $a \wedge b$ rappresenta il prodotto vettoriale di a, $b \in \mathbf{R}^3$.

(b) dal Teorema della Divergenza seguono le Formule di Gauss-Green nel piano.