

(4) Una volta provate la prima identità la seconda è banale dato che

$$\operatorname{rot} \nabla f = \operatorname{rot} \nabla g = 0$$

Per dimostrare la prima bisogna avere la pazienza di farri tutti i conti ed uguagliare le espressioni \cos e \sin e a div .

(5) Le domande del punto (a) le conosce bene almeno per le forme differenziali.

Per il punto (b), seguendo il suggerimento si ha che:

se f esiste $\Rightarrow \nabla f = -F^\perp$, resta da provare che $-F^\perp$ è un gradiente, che per (a) equivale a provare:

$$\operatorname{rot} (-F^\perp) = 0$$

ma:

$$\operatorname{rot} (-F^\perp) = \frac{\partial}{\partial y} (-F_2) - \frac{\partial}{\partial x} F_1 = -\operatorname{div} F = 0$$

e quindi la tesi.