CORSO di LAUREA in FISICA
ANALISI MATEMATICA 2A
Prova Scritta
25 Giugno 2003

1. Sia ω la forma differenziale

$$\omega(x,y,z) = \left(y^2 z e^{xy^2 z} - \frac{yz}{x^2+y^2}\right) dx + \left(2xyz e^{xy^2 z} + \frac{xz}{x^2+y^2}\right) dy + (xy^2 e^{xy^2 z} + xyz) dz$$

Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove γ è la curva intersezione del paraboloide $z = 2x^2 + 8y^2$ e dell'ellissoide $2x^2 + 8y^2 + \frac{z^2}{4} = 3$, orientata in senso antiorario come visto da un osservatore posto nell'origine.

2. Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2 + y, -2xy + z, z^2 + \log(1 + x^2 y^4))$ uscente dal dominio regolare D delimitato dalla superficie

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : z^3 = (x^2+y^2)^4,\ 0 \le z \le 2\right\}.$$

3. Calcolare l'area della superficie della porzione di sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ interna all'ellissoide $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{16} = 1$. Inoltre, calcolare il volume del solido da essi delimitato.

4. Siano $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$ un aperto, $\mathbf{F}, \mathbf{G} \in C^1(\Omega, \mathbf{R}^3)$ campi vettoriali. Provare che

$$\mathrm{div}(\mathbf{F} \wedge \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{G}.$$

Quindi, dedurre che se $f, g \in C^2(\Omega)$, allora $\mathrm{div}\,(\nabla f \wedge \nabla g) = 0$.

5. (a) Siano $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ un aperto e ω una forma differenziale ivi definita e di classe C^0. Dare delle condizioni necessarie e sufficienti affinchè ω sia esatta su Ω.

(b) Sia ω una forma differenziale di classe C^1 su $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ tale che sia ivi chiusa. Dimostrare che esiste $k \in \mathbf{R}$ tale che la forma

$$\omega(x,y) - \frac{k}{2\pi}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy\right)$$

è esatta su $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$.
(Sugg.to: provare che $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$, con γ_1, γ_2 curve semplici chiuse che circondano l'origine.)