ESERCIZIO 2

$\Sigma = \{(xyz) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z=0,\ x^2+y^2-2z=0\}$, Σ è l'intersezione di un paraboloide di rotazione con un piano.

La proiezione di Σ sul piano $z=0$ è la circonferenza di equazione:

$$\begin{cases} z = x+y \\ 2z = x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 = 2x+2y \Rightarrow$$

$$(x-1)^2+(y-1)^2 = 2$$

quindi una parametrizzazione di Σ è data da

$$\begin{cases} x = 1+\sqrt{2}\cos\theta \\ y = 1+\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = 2+\sqrt{2}(\cos\theta+\mathrm{sen}\,\theta) = 2+2\,\mathrm{sen}\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$\theta \in [0, 2\pi]$.

Sia $d(xyz)$ la distanza dall'asse z, allora

$$d^2(xyz) = x^2+y^2$$

notando che se $(xyz) \in \Sigma$ allora

$$d^2(xyz) = 2z$$

si ha che:

$$\max_{\Sigma} d^2 = \max_{\Sigma} 2z \quad , \quad \min_{\Sigma} d^2 = \min_{\Sigma} 2z$$

e quindi:

$$\max_{\Sigma} d^2 \overset{\theta=\pi/4}{=} d^2((2,2,4)) = 8$$

$$\min_{\Sigma} d^2 \overset{\theta=5\pi/4}{=} d^2((0,0,0)) = 0$$