ESERCIZIO 5

$f \in C^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ e ω_f esatta su $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \Rightarrow$ f chiusa su $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, se e solo se:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-y f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + \frac{x^2 f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = -f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - \frac{y^2 f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\underset{r=\sqrt{x^2+y^2}}{\Leftrightarrow} \quad r f'(r) + 2 f(r) = 0 \Leftrightarrow f(r) = \frac{c}{r^2} \quad c \in \mathbb{R}$$

da cui: $\quad f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \dfrac{c}{x^2+y^2}$

e quindi:

$$(*) \quad \omega_f(x,y) = c\cdot\left(\frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy\right)$$

Tale forma è esatta su $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ se e solo se $c=0$, con primitive $F(x,y) \equiv$ costante.

Il caso (b) è analogo, se ω_f è esatta su $\mathbb{R}^2\setminus\{x=0\}$ si perviene come sopra alla $(*)$.
D'altra parte: $\mathbb{R}^2\setminus\{x=0\} = A^+ \cup A^-$, con $A^+ = \{(x,y) : x>0\}$, $A^- = \{(x,y) : x<0\}$, e ω_f è chiusa su A^+ (A^-) con A^+ (A^-) stellato $\Rightarrow \omega_f$ esatta su $A^+ \cup A^- = \mathbb{R}^2\setminus\{x=0\}$.

Le primitive sono date da

$$F(x,y) = \begin{cases} c_+ \operatorname{atn}\dfrac{y}{x} + k_+ & (x,y)\in A_+ \\ c_- \operatorname{atn}\dfrac{y}{x} + k_- & (x,y)\in A^- \end{cases}$$

con $c_\pm, k_\pm \in \mathbb{R}$.