ESERCIZIO 1

La serie in questione è una serie di potenze, poiché:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\xi_n \ln \xi_n}} \qquad \xi_n \in (n, n+1)$$

si ha $a_n \to 0^+$ e quindi il raggio di convergenza R della serie è almeno 1, i.e., $R \geq 1$.
Usando il Criterio della Radice si prova che $R = 1$, infatti poiché $t \to (t \ln t)^{-1/2}$ è $\searrow$ su $[2, +\infty)$

$$a_n^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{\left[(n+1)\ln(n+1)\right]^{\frac{1}{2n}}}$$

$$a_n^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{\left[n \ln n\right]^{\frac{1}{2n}}}$$

d'altra parte: $(n \ln n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(\ln n)} \cdot n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \to +\infty} 1$

da cui:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = 1$$

Inoltre, se $x = 1$: $\sum a_n x^n = \sum a_n$ che diverge essendo a_n confrontabile con $(n \ln n)^{-1/2}$, mentre se $x = -1$ la serie converge per il Criterio di Leibnitz essendo $\sum a_n x^n = \sum (-1)^n a_n$ con $a_n \geq 0$, $a_n \geq a_{n+1}$ e $a_n \searrow 0^+$.
Per i risultati sulle serie di potenze si ha convergenza totale su $[-1+\delta, 1-\delta]$ $\forall \delta \in (0,1)$.
In realtà, per il Teorema di Abel la convergenza è uniforme su $[-1, 1)$.