$\boxed{\text{ESERCIZIO 3}}$

$$\begin{cases} y' = e^8 - e^{xy^3} := f(x,y) \\ y(x_0) = 0 \end{cases} \quad (C)$$

Poiché $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ dal teorema di Cauchy-Lipschitz e da quello di Prolungamento si deduce l'esistenza e l'unicità della soluzione di (C) definita sull'intervallo massimale $I_{x_0} = (\alpha_{x_0}, \beta_{x_0})$. Inoltre, la soluzione è anche $C^\infty(I_{x_0})$.

Si noti che se $y : I_{x_0} \to \mathbb{R}$ è la soluzione di (C) allora $z(x) := -y(-x)$ verifica

$$\begin{cases} z'(x) = y'(-x) = f(-x, y(-x)) = f(x, z(x)) \\ z(-x_0) = -y(x_0) = 0 \end{cases}$$

cioè z è la soluzione dell'equazione con dato iniziale $(-x_0, 0)$.
Si può quindi supporre $x_0 \geq 0$, notando che, se $x_0 = 0$, y soluzione è dispari e $\alpha_0 = -\beta_0$.

Si ha

$$f(x,y) > 0 \iff xy^3 < 8 \iff (x,y) \text{ t.c. } \begin{cases} x = 0 \\ y < \frac{2}{\sqrt[3]{x}} & x > 0 \\ y > \frac{2}{\sqrt[3]{x}} & x < 0 \end{cases}$$

e $\quad f(x,y) = 0 \iff y = 2/\sqrt[3]{x}$

Proviamo che $\forall x_0 \geq 0 \quad \boxed{\beta_{x_0} = +\infty}$

Infatti: $f(x,y) \leq e^8$, quindi per il teorema del confronto $y(x) \leq z(x) = e^8(x - x_0)$ se $x \in (x_0, \beta_{x_0})$ (in realtà basta integrare direttamente!).
Quindi per il teorema di Prolungamento
$\exists \xi_{x_0} \in (x_0, \beta_{x_0})$ t.c. $y'(\xi_{x_0}) = 0 \; (\iff \xi_{x_0} y^3(\xi_{x_0}) = 8)$