ESERCIZIO 4

Moltiplicando a destra e sinistra dell'uguale l'equazione per e^y si ottiene un'o.d.e. di Bernoulli per $z(x) = e^{y(x)}$:

$$y' = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) e^{2y} \iff$$
$$e^y y' = e^y \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) e^{3y} \iff$$
$$z' = z \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) z^3$$

Poiché $z(x) = e^{y(x)} \gneq 0$ le soluzioni dell'ultima equazione si ottengono tutte trasformandola in una lineare nella variabile $w = -1/2z^2$

$$w' = -2w \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x)$$

che ha integrale generale

$$w(x) = k e^{2\cos x} + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{4}.$$

Poiché $w = -\frac{1}{2z^2} \lneq 0$ l'intervallo di definizione di $z(x)$ dipende dalla scelta della costante k (che dipende dalla scelta della condizione iniziale). Indicando con I_k l'intervallo di definizione della soluzione si ha:

$$z(x) = \left(-2k e^{2\cos x} - \cos x - \frac{1}{2}\right)^{-1/2}$$

e quindi
$$y(x) = -\frac{1}{2} \ln\left(-2k e^{2\cos x} - \cos x - \frac{1}{2}\right)$$

Per discutere la dipendenza di I_k da k sia

$$\varphi(t) = k e^{2t} + \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \qquad t \in [-1, 1]$$

da cui $w(x) = \varphi(\cos x)$.