

Quindi,  $\exists! \xi_{x_0} \in (x_0, \beta_{x_0})$  t.c. ④

$$y'(x) > 0 \quad x \in (x_0, \xi_{x_0}) \Rightarrow y \nearrow \nearrow x \in (x_0, \xi_{x_0})$$

$$y'(x) < 0 \quad x \in (\xi_{x_0}, \beta_{x_0}) \Rightarrow y \searrow \searrow x \in (\xi_{x_0}, \beta_{x_0}) \quad (*)$$

$\Rightarrow x = \xi_{x_0}$  punto di massimo relativo.

Se Teorema di Prolungamento e (\*) implicano facilmente  $\beta_{x_0} = +\infty$ .

Proviamo che  $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} y$  ( $\exists$  per  $(*)$ )  $\tilde{=} 0$ .

Se p.a.  $L > 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y' = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - e^{xy^3}) = -\infty$$

che è assurdo per il Teorema dell'Asintoto.

Proviamo adesso che  $\boxed{\alpha_{x_0} = -\infty}$ .

Infatti, se  $x \in (\alpha_{x_0}, x_0)$  si ha che

$$y(x) \in [e^x(x-x_0), 0]$$

quindi ragionando come prima si deduce che  $\exists! \eta_{x_0} \in (\alpha_{x_0}, x_0)$  t.c.  $y'(\eta_{x_0}) = 0$ .

Quindi:

$$y'(x) > 0 \quad x \in (\eta_{x_0}, x_0) \Rightarrow y \nearrow \nearrow x \in (\eta_{x_0}, x_0)$$

$$y'(x) < 0 \quad x \in (\alpha_{x_0}, \eta_{x_0}) \Rightarrow y \searrow \searrow x \in (\alpha_{x_0}, \eta_{x_0}) \quad (+)$$

$\Rightarrow x = \eta_{x_0}$  punto di minimo relativo.

Come prima da (+) e dal Teorema di Prolungamento segue  $\alpha_{x_0} = -\infty$ , e dal Teorema dell'Asintoto segue:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$$

Dallo studio fatto si deduce che  $x = \xi_{x_0}$  è massimo assoluto e  $x = \eta_{x_0}$  è minimo assoluto.