(1) $\omega_f(xy) = f(xy)(y\,dx + x\,dy)$, $f \in C^1(\mathbb{R})$

ω_f è chiusa:

$$\frac{\partial \omega_f^1}{\partial y} = f(xy) + xy f'(xy)$$

$$\frac{\partial \omega_f^2}{\partial x} = f(xy) + xy f'(xy)$$

$\Rightarrow \omega_f$ è esatta su $\mathbb{R}^2$.

Fix $(xy) \in \mathbb{R}$, indicata con F una primitiva si ha:

$$F(xy) - F(00) = \int_0^x \cancel{\omega_f^1(t,0)}^{\,0}\,dt + \int_0^y \omega_f^2(x,t)\,dt$$

$$= \int_0^y x f(xt)\,dt = \int_0^{xy} f(s)\,ds$$

Quindi, le primitive di f sono della forma

$$\int_0^{xy} f(s)\,ds + \text{cost}.$$