CORSO di LAUREA in FISICA
ANALISI MATEMATICA 2A
Prova Scritta
22 Settembre 2003

1 Sia $f \in C^1(\mathbf{R})$, provare che la forma differenziale

$$\omega_f(x,y) = f\,(xy)\,(ydx + xdy)$$

è esatta su $\mathbf{R}^2$. Dare una formula per le primitive.

2. Sia Σ la porzione di paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$ la cui proiezione sul piano $z = 0$ è il dominio

$$T = \left\{(x,y) : x \leq y \leq \frac{1}{2},\ x^2 + y^2 \geq \frac{1}{16}\right\}.$$

Calcolare

$$\int_\Sigma \frac{xy^4}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} d\sigma.$$

3. Sia C la superficie cilindrica di asse $x = y = 0$ e direttrice la curva nel piano $z = 0$ descritta dall'equazione polare $\rho(\theta) = 2\sqrt{|\cos\theta|}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Calcolare il volume della regione di spazio interna a C e delimitata dalla superficie di equazione $z^2 - (x^2 + y^2) = 4$.

4. Siano $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$ un aperto e $f, g \in C^1(\Omega)$. Provare che per ogni $S \subseteq \Omega$ sostegno di una superficie regolare con bordo vale

$$\int_{\partial^+ S} (f\nabla g + g\nabla f) \cdot \tau \; ds = 0,$$

dove τ è il vettore tangente a ∂S orientato nel verso positivo corrispondente all'orientamento della superficie di sostegno S.

5. Siano $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un aperto, $\gamma : [a,b] \to \Omega$ una curva regolare, u, v due funzioni differenziabili su Ω tali che $u(\gamma(t)) = v(\gamma(t))$ per ogni $t \in [a,b]$. Provare che

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(\gamma(t)) = \frac{\partial v}{\partial \tau}(\gamma(t))$$

per ogni $t \in (a,b)$, dove τ indica il versore tangente a γ.

(Sugg.to: usare la definizione di differenziabilità.)