CORSO di LAUREA in FISICA
ANALISI MATEMATICA 2A e 2B

Prova Scritta 15 Luglio 2004

Risolvere almeno due dei seguenti esercizi:

1. Al variare di $k \in \mathbf{R}$ discutere la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni
$$f_n(x) = n^k \left(\mathrm{e}^{\frac{\cos^2 x}{n}} - 1 \right) \sin\left(\frac{n\pi}{n+2} x \right).$$

2. Integrare al variare di $k \in \mathbf{R}$ l'equazione differenziale
$$y''' + y'' - 2y = 5e^{kx}.$$

Inoltre, determinare le soluzioni passanti per $(0,0)$ e aventi in tale punto un flesso a tangente orizzontale.

3. Sia $f(x,y,z) = xy^2 - \sin(xz) + \log y$, verificare che l'equazione $f(x,y,z) = 0$ definisce implicitamente una funzione del tipo $y = y(x,z)$ in un intorno del punto $P \equiv (0,1,k)$, $k \in \mathbf{R}$.

Determinare lo sviluppo di Taylor del secondo ordine di tale funzione in un intorno di $P' \equiv (0,k)$, trovare i valori di k per cui il punto P' è un punto critico e specificarne la natura.

4. Determinare massimi e minimi assoluti della funzione
$$f(x,y) = e^{\frac{x^2}{4}+y^2} - x^2 - y^2$$
sull'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 9\}$.

Risolvere almeno uno dei seguenti esercizi:

5. Determinare i valori dei parametri $a, b \in \mathbf{R}$ per cui il campo
$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{a(x-1)}{x^2+y^2-2x-3}; \frac{by}{x^2+y^2-2x-3} \right)$$
risulta essere conservativo sul suo dominio. Inoltre, determinarne tutti i potenziali.

6. Siano $u \in C^1(\mathbf{R}^2)$, $p : [0,+\infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$ la funzione $p(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, e $v(\rho,\theta) = u\,(p(\rho,\theta))$.

Esprimere il modulo del gradiente di u in funzione delle derivate parziali prime di v e la divergenza del gradiente di u in funzione delle derivate parziali seconde di v.