CORSO di LAUREA in FISICA
ANALISI MATEMATICA 2A
Prova Scritta
10 Luglio 2003

1. Fissato $n \in \mathbf{N}$, determinare per quali valori dei parametri $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ la forma differenziale

$$\omega(x,y,z) = \frac{x^\alpha}{x^{2n}+y^{2n}+z^{2n}}dx + \frac{y^\beta}{x^{2n}+y^{2n}+z^{2n}}dy + \frac{z^\gamma}{x^{2n}+y^{2n}+z^{2n}}dz$$

risulta esatta sul suo dominio. Dare una formula per le primitive.

2. Sia S la porzione della superficie di equazione $z = 1 - x^4 - y^6$ contenuta nel semispazio $z \geq 0$. Calcolare la circuitazione del campo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(x^2 z + 2e^{2x+3y}, \log(2+y^4+z^2) + 3e^{2x+3y}, 3xy^2z^3\right)$$

lungo $\partial^+ S$.

3. Calcolare la massa ed il baricentro della lamina sottile Σ delimitata dalla retta $y = 0$ e dalla curva di equazioni polari $\rho(\theta) = 2(1+\cos\theta)$, con $\theta \in [0, \pi]$, sapendo che la densità in ogni punto di Σ è data dalla distanza dall'origine.

4. Si ricordi che un vettore normale $\mathbf{n}$ in un punto (x,y,z) del bordo di un dominio regolare $D \subseteq \mathbf{R}^3$ si dice *esterno* se per t sufficientemente piccolo $(x,y,z)+t\mathbf{n} \notin D$.

Siano $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ aperto, $f \in C^1(\Omega)$ e $D = \{(x,y,z) \in \Omega \times \mathbf{R} : z \leq f(x,y)\}$. Dimostrare che la normale esterna $\mathbf{n}$ a D nei punti del tipo $(x,y,f(x,y))$ è data da $(-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1)$.

(Sugg.to: fissato $(x,y,f(x,y)) \in \partial D$, dimostrare che la funzione

$$\varphi(t) = z + t - f\left(x - tf_x(x,y), y - tf_y(x,y)\right)$$

è strettamente crescente in un intorno di $t = 0$.)

5. Sia $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ un aperto semplicemente connesso, dimostrare che

(a) un campo vettoriale $\mathbf{F} \in C^1(\Omega, \mathbf{R}^2)$ è conservativo se e solo se è irrotazionale.

(b) se $\mathbf{F} \in C^1(\Omega, \mathbf{R}^2)$ è tale che div$\mathbf{F} = 0$, allora esiste $f \in C^2(\Omega)$ tale che

$$\mathbf{F} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x_2}; \frac{\partial f}{\partial x_1}\right).$$