CORSO di LAUREA in FISICA

ANALISI MATEMATICA 2A

Prova Scritta

10 Aprile 2003

1. Sia
$$\omega(x,y) = \frac{2x-3y}{x^2+9y^2}dx + \frac{3x+18y}{x^2+9y^2}dy,$$
provare che ω è esatta su $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x,y) : x = y,\ y > -1\}$ e determinarne tutte le primitive. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$, dove γ è l'ovale $x^8+y^8 = 1$ percorso in senso antiorario.

2. Determinare il volume della porzione del cilindro di asse la retta $x = y = z$, di direttrice la curva di equazione
$$\begin{cases} (z^2+y^2)(z^2+y^2+y) = 4yz^2 \\ x = 0, \end{cases}$$
e compresa tra i piani $x = -1$, $x = 3$.

3. Calcolare l'area della porzione di superficie sferica di equazione $x^2+y^2+z^2 = 2$ che sta nella regione di spazio $E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : |z| \le x^2+y^2\}$.

4. Per ogni punto P del semipiano $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0\}$ si denotino con ρ_1, ρ_2 le distanze dai punti $P_1 = (-1,0)$, $P_2 = (1,0)$, rispettivamente.

Siano $B = \{(\rho_1,\rho_2) \in (0,+\infty)^2 : \rho_1+\rho_2 > 2; |\rho_1-\rho_2| < 2\}$ e $\Phi : A \to B$ definita da $\Phi(x,y) = (\rho_1;\rho_2)$. Φ risulta invertibile, con inversa $\Phi^{-1} : B \to A$ data da
$$\Phi^{-1}(\rho_1;\rho_2) = \left(\frac{\rho_1^2-\rho_2^2}{4};\sqrt{\rho_2^2 - \left(\frac{\rho_1^2-\rho_2^2}{4}-1\right)^2}\right).$$
Φ^{-1} è un sistema di coordinate sul semipiano A. Mediante tale cambiamento di coordinate determinare
$$\iint_D y\,dxdy,$$
dove $D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0;\ 1 \le (x+1)^2+y^2 \le 4;\ \frac{25}{16} \le (x-1)^2+y^2 \le \frac{49}{16}\right\}$.

5. Sia $D \subseteq \mathbf{R}^3$ un dominio regolare, provare che

(a) se $f, g \in C^1(D)$, allora
$$\iiint_D \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}g + f\frac{\partial g}{\partial \mathbf{v}}\right) dxdydz = \int_{\partial D} fg\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma,$$
dove $\mathbf{n}$ rappresenta la normale esterna a ∂D e $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$ la derivata direzionale di f nella direzione $\mathbf{v}$.

(b) se D è semplicemente connesso, $\mathbf{F} \in C^2(D;\mathbf{R}^3)$ con $\mathrm{rot}\mathbf{F} = 0$, allora $\mathbf{F}$ è conservativo.