(5)

(a) poiché $\mathbb{R}^2$ è stellato e ω è $C^1(\mathbb{R}^2)$ le due condizioni sono equivalenti

(b) $\omega(x,y) = f(x,y)\,dx - f(y,x)\,dy$ non è chiusa: basta esibire (x_0,y_0) per cui:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} f\right)(x_0,y_0) \neq -\left(\frac{\partial}{\partial y} f\right)(y_0,x_0)$$

dato che se $g(x,y) = f(y,x)$, allora:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y,x).$$

Si noti che: $f(0,y) = -y \Rightarrow f_y(0,0) = -1$.
Quindi, $(0,0)$ è il punto (x_0,y_0) cercato.
Per verificare che ω è esatta si noti che $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$, inoltre fix $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se esiste una primitiva F allora:

$$F(x,y) - F(0,0) = \int_0^x \cancel{\omega(t,0)\cdot(1,0)}^{\,0}\,dt + \int_0^y \omega(x,t)\cdot(0,1)\,dt$$

$$= -\int_0^y f(t,x)\,dt = -\int_0^y \frac{xt^4 + 4t^2x^3 - x^5}{(x^2+t^2)^2}\,dt$$