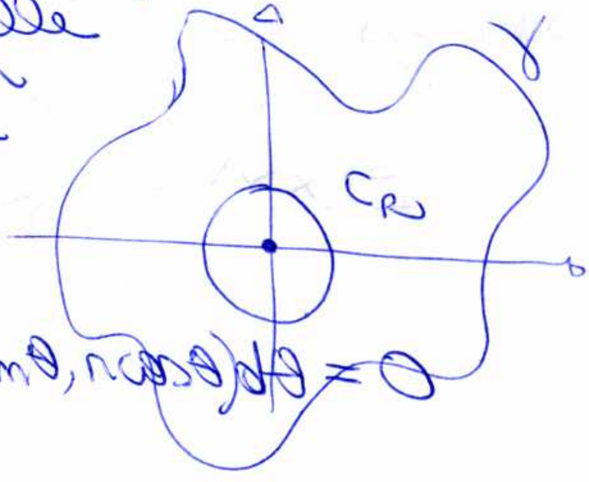
8/09/03

(1) $\omega_f(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})\,(x\,dx + y\,dy)$, $f \in C^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})$.
Si verifica facilmente che ω_f è chiusa $\Rightarrow$ ω_f esatta su ogni s.i. di $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ sempl.te connesso.
Quindi, se γ è una curva chiusa semplice che non circonda $(0,0)$ si ha
$$\int_\gamma \omega_f = 0$$
Se invece γ circonda $(0,0)$ si ha:
$$\int_\gamma \omega_f = \int_{C_R} \omega_f$$
con C_R circonf. di centro $(0,0)$ e raggio R opportuno. Ciò segue dalle formule di Gauss-Green applicate al dominio il cui bordo è $\gamma \cup C_R$.
D'altra parte, $\forall\, r>0$



$$\int_{C_r} \omega_f = \int_0^{2\pi} f(r)\,(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot(-r\sin\theta, r\cos\theta)\,d\theta = 0$$
$$\Rightarrow \int_\gamma \omega_f = 0 \quad \forall \gamma \text{ come sopra}$$
$\Rightarrow$ ω_f esatta su $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Per det.re le primitive di ω_f si procede così: fix (x,y), si prende la curva γ unione del segmento di estremi $(1,0)$ e $(\sqrt{x^2+y^2},0)$ e dell'arco di circonferenza che unisce $(\sqrt{x^2+y^2},0)$ e (x,y), allora se F è una primitiva di f si ha: