CORSO di LAUREA in FISICA
ANALISI MATEMATICA 2A

Prova Scritta

8 Settembre 2003

1. Sia $f \in C^1(\mathbf{R} \setminus \{0\})$, provare che la forma differenziale

$$\omega_f(x, y) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)(x dx + y dy)$$

è esatta su $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Dare una formula per le primitive.

2. Sia $C_r \subset \mathbf{R}^3$ la circonferenza di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = r^2 \\ y = 0 \end{cases}$$

orientata in senso antiorario, come visto da un osservatore posto sul semiasse positivo delle y . Sia $\mathbf{F} \in C^1(\mathbf{R}^3 \setminus \{x = z = 0\}, \mathbf{R}^3)$ tale che $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} ds = 2$ e $\text{rot}\mathbf{F} = (-6xz \log|y|, 2, 3z^2 \log|y|)$. Per ogni $r \in (0, +\infty)$ calcolare $\int_{C_r} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} ds$.

3. Sia Σ la porzione dell'elica cilindrica di passo unitario e asse la retta $x = y = 0$ interna all'ellissoide di equazione $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4\pi^2} = 1$. Calcolare $\int_{\Sigma} \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$.

4. Siano $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$ un aperto e $\mathbf{F} \in C^2(\Omega, \mathbf{R}^3)$. Provare che

$$\nabla(\text{div}\mathbf{F}) - \text{rot}(\text{rot}\mathbf{F}) = (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3),$$

dove $\Delta F_i = \frac{\partial^2 F_i}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial^2 z}$. Quindi, calcolare

$$\iiint_{\Omega} (\nabla(\text{div}\mathbf{F}) - \text{rot}(\text{rot}\mathbf{F})) \cdot (x, y, z) dx dy dz,$$

dove $\Omega = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$ e

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, x^2 + 2y - z^2, x + y + z \right).$$

5. Sia ω una forma differenziale di classe $C^0(\mathbf{R}^2)$.

(a) Provare che se ω è di classe $C^1(\mathbf{R}^2)$ allora è chiusa se e solo se è esatta.

(b) Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

verificare che la forma differenziale $\omega(x, y) = f(x, y)dx - f(y, x)dy$ è esatta ma non chiusa su $\mathbf{R}^2$. Spiegare perché questo esempio non è in contrasto col punto (a).