ESERCIZIO

$$\begin{cases} y' = (|y|-1)\,\mathrm{atn}(y^2 - x^4) = f(x,y) \\ y(x_0) = x_0 \end{cases} \qquad (*)$$

$f \in C^0(\mathbb{R}^2)$ e localmente lipschitziana in y uniformemente in x:

$$f(x,y_1) - f(x,y_2) = (|y_1|-|y_2|)\,\mathrm{atn}(y_1^2 - x^4) +$$

$$+(|y_2|-1)(\mathrm{atn}(y_1^2-x^4) - \mathrm{atn}(y_2^2-x^4))$$

$$\Rightarrow |f(x,y_1)-f(x,y_2)| \leq \frac{\pi}{2}|y_1-y_2| +$$

$$2(|y_2|-1)(|y_1|+|y_2|)^2\,|y_1-y_2|$$

Infine, poiché:

$$|f(x,y)| \leq \frac{\pi}{2}(|y|+1) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

per il Thm di $\exists!$ globale esiste unica soluzione y di $(*)$ definita su tutto $\mathbb{R}$.

Si noti che: $z(x) = -y(-x)$ t.c.

$$z'(x) = y'(-x) = f(-x, y(-x)) = f(x, -y(-x)) = f(x, z(x))$$

e $z(0) = -y_0$. Cioè $-y(-x)$ è sol. del Pb di Cauchy con dato iniziale $-y_0$.
Si può quindi supporre $y_0 \geq 0$, per $y_0 = 0$ la soluzione risulta essere dispari.

Se $y_0 = 1 \Rightarrow y(x) \equiv 1$ è la soluzione, quindi:
se $y_0 \in [0,1) \Rightarrow |y(x)| < 1$,
se $y_0 > 1 \quad \Rightarrow y(x) > 1$