ESERCIZIO 6

$f, g \in C^1(\mathbb{R})$

$$\omega(x,y) = \underbrace{(x^2+y^2-1)^{-1}(x^2+y^2-2)^{-1}}_{h(x,y)} \left(f(x)\,dx + g(y)\,dy \right)$$

ω è di classe $C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : x^2+y^2 \in \{1,2\}\})$

Condizione nec.ria affinché ω sia esatta è che sia chiusa:

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x} - \frac{\partial \omega_1}{\partial y} = g(y)\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) - f(x)\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)$$

poiché $h(x,y) = h(y,x)$ si ha:

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial x}(y,x)$$

infine: $$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{-2x\left(x^2+y^2-1+x^2+y^2-2\right)}{(x^2+y^2-1)^2(x^2+y^2-2)^2}$$

e quindi:

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x} - \frac{\partial \omega_1}{\partial y} = 0 \iff x\,g(y) - y\,f(x) = 0$$

per (x,y) t.c. $x \neq 0, y \neq 0$ ciò significa

$$\frac{g(y)}{y} = \frac{f(x)}{x} \iff \frac{g(y)}{y} = \frac{f(x)}{x} \equiv k \in \mathbb{R}$$

e per continuità di f, g si ha che:

$$f(x) = kx, \quad g(y) = ky \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Poiché $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ (vedi figura) e D_i è semplicemente connesso, ω (con la scelta di $f(t) = g(t) = kt$) è ivi esatta