ESERCIZIO :

Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^{\ln^2|n^2x|+2\ln|n^2x|+2}}$$

su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Indicato con $f_n(x) = \frac{1}{3^{\ln^2|n^2x|+2\ln|n^2x|+2}}$ si ha che

$$f_n(x) \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

dato che per tali x $\ln|nx| \to -\infty$.

Inoltre, poiché fissato x per n ~~sufficientemente grande~~

$$\ln^2|n^2x| + 2\ln|n^2x| + 2 \geq \ln|n^2x|$$

si ha che

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{3^{\ln|n^2x|}} = \frac{1}{|n^2x|^{\ln 3}}$$

e quindi, essendo $2\ln 3 > 1$ la serie converge totalmente su tutti gli insiemi del tipo $(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)$.

La serie non converge uniformemente su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ dato che

$$\sup_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} |f_n| \geq f_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{9}$$