ESERCIZIO

$$f(x,y) = \int_0^{\frac{1}{x^2+9y^2}} t^4 e^{-t^2}\left((t-1)^2(t-2)^2-36\right)dt$$

$\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f \in C^\infty(\mathrm{Dom} f)$.

Se

$$g(t) = \int_0^t s^4 e^{-s^2}\left((s-1)^2(s-2)^2-36\right)ds$$

allora $f(x,y) = g\left(\frac{1}{x^2+9y^2}\right)$ e quindi

$$\nabla f(x,y) = g'\left(\frac{1}{x^2+9y^2}\right)\frac{-1}{(x^2+9y^2)^2}(2x,18y)$$

da cui:

$$\nabla f(x,y) = \underline{0} \iff \begin{cases} (x,y)=(0,0) \notin \mathrm{Dom} f \\ g'\left(\frac{1}{x^2+9y^2}\right)=0 \end{cases}$$

D'altra parte:

$$g'(t)=0 \iff t^4\left((t-1)^2(t-2)^2-36\right)=0 \iff$$

$$t \in \{0,-1,4\}$$

e quindi: $g'\left(\frac{1}{x^2+9y^2}\right)=0 \iff x^2+9y^2=\frac{1}{4}$

Poiché:

$$g'(t) \gneq 0 \iff t \in (-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$$

l'ellisse $x^2+9y^2=\frac{1}{4}$ è luogo di punti di minimo relativo.

In realtà, dal segno di g' si deduce