CORSO di LAUREA in FISICA
ANALISI MATEMATICA 2A e 2B

Prova Scritta 1 Settembre 2004

Risolvere almeno due dei seguenti esercizi:

1. Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(x^n)\right)\frac{1}{1+n^{1/x}}.$$

2. Determinare i valori del parametro $\lambda \in \mathbf{R}$ per cui il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} 3xy'+y=\dfrac{1}{1+x} \\ y(0)=\lambda \end{cases}$$

ammette soluzione. Esibire tali soluzioni.

3. Studiare l'andamento qualitativo delle soluzioni del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'=\dfrac{x}{y}\exp\left(\dfrac{x}{y}-1\right) \\ y(x_o)=1/x_o. \end{cases}$$

4. Determinare gli estremi inferiore e superiore ed eventuali estremi relativi e assoluti sull'insieme $E=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : |x^2-y^2|<1/2\}$ della funzione

$$f(x,y)=xy\left|\ln\left(x^2+y^2+\frac{1}{2}\right)\right|.$$

5. Sia $F(x,y,z)=\exp(xyz)-\ln(xyz)$, provare che il luogo dei punti critici di F è localmente un grafico regolare del tipo $z=f(x,y)$. Esplicitarne il vettore normale.

Risolvere almeno uno dei seguenti esercizi:

6. Calcolare l'integrale della forma

$$\omega(x,y)=\left(\frac{2x(y^2-1)}{x^4+y^4-2y^2+1}-y\right)dx+\left(x-\frac{2yx^2}{x^4+y^4-2y^2+1}\right)dy,$$

sulla curva di equazione $x^{2/3}+y^{2/3}=4$ orientata in senso antiorario.

7. Siano $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ un aperto, $u\in C^1(\Omega,\mathbf{R}^2)$ iniettiva tale che $|u(x,y)|\neq 0$ per ogni $(x,y)\in\Omega$, e $\mathbf{U}$ il campo vettoriale

$$\mathbf{U}(x,y)=\frac{1}{|u|^2}\left(u_1\frac{\partial u_2}{\partial x}-u_2\frac{\partial u_1}{\partial x};u_1\frac{\partial u_2}{\partial y}-u_2\frac{\partial u_1}{\partial y}\right).$$

Provare che per ogni curva regolare semplice chiusa $\gamma : [a, b] \to \Omega$ si ha

$$\int_\gamma \mathbf{U} \cdot \mathbf{t}_\gamma \, ds = 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

(Sugg.to: ricordarsi che se $\mathbf{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}; \frac{x}{x^2+y^2}\right)$, allora $\int_\zeta \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}_\zeta \, ds = 2\pi\lambda$, $\lambda \in \mathbf{Z}$, per ogni curva regolare semplice chiusa $\zeta : [a, b] \to \Omega \setminus \{0\}$.)