CORSO di LAUREA in FISICA
ANALISI MATEMATICA 2
Prova Scritta Parziale
28 Gennaio 2002

1. Sia E il solido interno alla palla di centro l'origine e raggio unitario ed al cono di vertice l'origine che si appoggia alla curva di equazioni

$$\begin{cases} (x^2+z^2)^2 = 4xz^2 \\ \\ y = 1. \end{cases}$$

Calcolare

$$\iiint_E (1+x^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\, dx\, dy\, dz.$$

2. Sia $g : \mathbf{R}^2 \to (0,+\infty]$ una funzione continua. Determinare estremo inferiore e superiore della funzione

$$f(x,y) = \iint_{\{(u,v)\in\mathbf{R}^2 : u^2+v^2 \le x^2+y^2\}} g(u,v)\, du\, dv$$

sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : \Big((x-2)^2+y^2-1\Big)\Big((x+2)^2+y^2-1\Big) = 0\Big\}.$$

3. Sia C il cilindro di asse z e direttrice l'arco di circonferenza una cui rappresentazione parametrica è data da $\theta \to (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ per $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$. Sia S la porzione di tale cilindro compresa fra i piani di equazione $z+x=1$, $z-x=-1$, calcolare la circuitazione del campo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(-yz + \frac{x}{x^2+y^2}; xz + \frac{y}{x^2+y^2}; \frac{x^2+y^2}{2}\right)$$

lungo ∂S.

4. Si consideri la funzione

$$F(x,y,z) = z^3 + \Big(\exp(x^2y^2) - 1 - x^2y^2\Big)\, z + x^2\exp(z).$$

(i) Tra i punti $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ tale che $F(x,y,z)=0$, determinare quelli per cui si può applicare il Teorema del Dini in modo da esprimere z in funzione di (x,y).

(ii) Provare che per ogni $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ l'equazione $F(x,y,z)=0$ ha una e una sola radice $z(x,y)\in(-\infty,0]$.
Trovare estremo inferiore e superiore della funzione $(x,y)\to z(x,y)$ su $\mathbf{R}^2$.