CORSO di LAUREA in FISICA
ANALISI MATEMATICA 2
Prova Scritta
25 Settembre 2002

1. Sia $\omega_n : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}^*$, $n \geq 1$, definita da
$$\omega_n(x,y) = \frac{x^{n-1}y^{n-1}}{x^{2n}+y^{2n}}\,(-y dx + x dy)\,.$$
Provare che
(i) ω_n è chiusa per ogni $n \geq 1$;
(Suggerimento: usare il Teorema di Eulero per le funzioni omogenee.)
(ii) trovare gli $n \geq 1$ per cui ω_n è esatta e determinarne le primitive.
(Suggerimento: integrare su una circonferenza con centro l'origine.)

2. Provare che l'equazione
$$\sin(3x+y+z) + y^2\cos z + z = 0$$
definisce implicitamente, in un intorno di $(x,y) = (0,0)$, una funzione $z = g(x,y)$ tale che $g(0,0) = 0$.
Provare che tale funzione ha massimo relativo in $(0,0)$.

3. Determinare il volume del solido interno al toro ottenuto ruotando intorno all'asse $x = y = 0$ l'ellisse
$$\begin{cases} x = 0 \\ (y-2)^2 + \dfrac{z^2}{4} = 1, \end{cases}$$
ed esterno al cono di vertice $V \equiv (0,0,-2)$ ottenuto ruotando intorno l'asse $x = y = 0$ la retta passante per V e per il punto $A \equiv (0,2,0)$

4. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione
$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k \sin\left(\frac{x}{k}\right).$$

5. Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale
$$y'' + y'\tan(x) = \frac{\sin x}{1+\sin x}$$
nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Calcolare i limiti di $y(x)$, $y'(x)$ negli estremi di tale intervallo.