CORSO di LAUREA in FISICA
ANALISI MATEMATICA 2
Prova Scritta Parziale
21 Dicembre 2001
SOLUZIONI

1. Studiare l'andamento qualitativo della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan\left(x^4 + y^4 - 1\right) \\ \\ y(0) = y_0 \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{1}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Soluzione: Sia $f(x, y) = \arctan\left(x^4 + y^4 - 1\right)$, poichè $f \in C^{\infty}\left(\mathbf{R}^2\right)$ e

$$-\frac{\pi}{4} \leq f(x, y) \leq \frac{\pi}{2}$$

dal Teorema di Prolungamento seguono l'esistenza e l'unicità della soluzione $y_{y_0}(x)$ non estendibile di (1) su tutto $\mathbf{R}$.

Si noti che si può supporre $y_0 \geq 0$ dato che $z(x) = -y_{y_0}(-x)$ è tale che

$$z'(x) = y'(-x) = f(-x, y(-x)) = f(x, -y(-x)) = f(x, z(x)),$$

ed inoltre $z(0) = -y_0$. Per l'unicità delle soluzioni $z(x) = y_{-y_0}(x)$, quindi conoscendo il comportamento delle soluzioni per dati iniziali positivi si conosce anche quello delle soluzioni per dati iniziali negativi. Inoltre, per $y_0 = 0$ la soluzione è dispari.

Si noti che $f(x, y) \geq 0$ se e solo se $x^4 + y^4 \geq 1$.

Quindi, se $y_0 \in [0, 1)$ esistono $-1 < \eta_0 < 0 < \xi_0 < 1$ tali che $y'_{y_0}(\eta_0) = y'_{y_0}(\xi_0) = 0$. Inoltre, poichè

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{4x^3}{1 + \left(x^4 + y^4 - 1\right)^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0,$$

dal Teorema di Monotonia segue che per $y_0 \in [0, 1)$ si ha

$$y'_{y_0}(x) > 0 \;\; x \in (-\infty, \eta_0) \cup (\xi_0, +\infty), \quad y'_{y_0}(x) < 0 \;\; x \in (\eta_0, \xi_0),$$

da cui $x = \eta_0$ punto di massimo locale e $x = \xi_0$ punto di minimo locale.

Per $y_0 \geq 1$ basta osservare che $y_{y_0}(x) > y_1(x)$ e che per il Teorema di Monotonia, essendo $f(0, 1) = 0$, si ha $y'_1(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$. Quindi, per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$x^4 + y_0^4(x) > x^4 + y_1^4(x) \geq 1 \Leftrightarrow y'_0(x) > 0 \text{ per ogni } x \in \mathbf{R}.$$

Il punto $x = 0$ risulta essere un flesso a tangente orizzontale per $y_1(x)$.

Quindi, per ogni $y_0 \in [0, +\infty)$ si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} y_{y_0}(x) = \pm\infty,$$

dato che tali limiti esistono per la monotonia di y_{y_0}, ed inoltre

$$\lim_{x \to \pm\infty} y'_{y_0}(x) = \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Lo studio della convessità delle soluzioni è solo parziale, infatti si ha

$$y''(x) = \frac{4x^3 + 4y^3 y'}{1 + (x^4 + y^4 - 1)^2},$$

quindi y_{y_0} risulta convessa per $x >> 0$ e concava per $x << 0$. In realtà, per quanto finora dimostrato, se $y_0 \geq 1$ la soluzione y_{y_0} è convessa per ogni $x \geq 0$.

Proviamo che per ogni $y_0 \in [0, +\infty)$ la soluzione y_{y_0} ha asintoto obliquo a $\pm\infty$. Infatti, per (2) se un asintoto esiste ha coefficiente angolare $\frac{\pi}{2}$. Inoltre, si ha

$$\begin{aligned} y_{y_0}(x) - \frac{\pi}{2}x &= y_{y_0}(1) - \frac{\pi}{2} + \int_1^x \left(\arctan\left(t^4 + y^4(t) - 1\right) - \frac{\pi}{2} \right) dt \\ &= y_{y_0}(1) - \frac{\pi}{2} - \int_1^x \arctan\left(\frac{1}{t^4 + y^4(t) - 1} \right) dt, \end{aligned}$$

e la funzione integranda dell'ultimo integrale è asintotica a $\frac{1}{t^4}$ in un intorno di $+\infty$. Infatti, si ha

$$\begin{aligned} & t^4 \arctan\left(\frac{1}{t^4 + y^4(t) - 1} \right) \\ & \quad = \frac{\arctan\left(\frac{1}{t^4 + y^4(t) - 1}\right)}{\frac{1}{t^4 + y^4(t) - 1}} \frac{t^4}{t^4 + y^4(t) - 1} \to \frac{1}{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^4} \end{aligned}$$

per $t \to +\infty$. Si procede analogamente per provare che esiste un asintoto a $-\infty$. Quindi, esistono $L, l \in \mathbf{R}$ tali che

$$\lim_{x \to +\infty} \left(y_{y_0}(x) - \frac{\pi}{2}x - L \right) = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} \left(y_{y_0}(x) - \frac{\pi}{2}x - l \right) = 0.$$

2. Calcolare le coordinate del baricentro della lamina sottile rappresentata dal dominio Ω unione dell'insieme

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : 3x \leq y \leq 4x, \ \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x} \right\}.$$

e del suo simmetrico D' rispetto la retta $y = x$.

Soluzione: Per ovvi motivi di simmetria le coordinate $(\overline{x}, \overline{y})$ del baricentro verificano $\overline{x} = \overline{y}$.

Si noti che definendo $\Phi : (0, +\infty) \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ come

$$\Phi(x, y) = \left(xy, \frac{y}{x}\right),$$

allora $\Phi \in C^1\left((0, +\infty) \times \mathbf{R}\right)$, Φ è biunivoca e

$$\det\nabla\Phi(x, y) = \det\begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix} = 2\frac{y}{x} > 0.$$

Inoltre, se $(u, v) = \Phi(x, y)$ allora $\Phi(D) = \{(u, v) : u \in [1, 2],\ v \in [3, 4]\}$. Segue

$$\begin{aligned} area(\Omega) &= 2\iint_D dxdy = 2\iint_{\Phi(D)} \det\nabla\Phi^{-1}(u, v)dudv \\ &= 2\iint_{\Phi(D)} \frac{1}{\det\nabla\Phi(u, v)}dudv = 2\iint_{\Phi(D)} \frac{1}{2v}dudv \\ &= \int_1^2 du \int_3^4 \frac{1}{v}dv = 2\ln\left(\frac{4}{3}\right). \end{aligned}$$

Allora, si ha

$$\begin{aligned} \overline{x} = \overline{y} &= \frac{1}{area(\Omega)}\iint_\Omega xdxdy \\ &= \frac{1}{2\ln\left(\frac{4}{3}\right)}\iint_D xdxdy + \frac{1}{2\ln\left(\frac{4}{3}\right)}\iint_{D'} xdxdy. \end{aligned}$$

D'altra parte, se $\Psi(x, y) = (y, x)$, e $(X, Y) = \Psi(x, y)$, si ha $\Psi(D') = D$ e

$$\iint_{D'} xdxdy = \iint_D Y\left|\det\nabla\Psi^{-1}(X, Y)\right|dXdY = \iint_D YdXdY.$$

Quindi, si devono calcolare

$$\begin{aligned} \iint_D xdxdy &= \iint_{\Phi(D)} \frac{1}{2v}\sqrt{\frac{u}{v}}dudv \\ &= \int_1^2 du\int_3^4 \frac{1}{2v}\sqrt{\frac{u}{v}}dv = \frac{2}{3}\left(\sqrt{8} - 1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \iint_{D'} xdxdy &= \iint_D ydxdy = \iint_{\Phi(D)} \frac{1}{2v}\sqrt{uv}dudv \\ &= \int_1^2 du\int_3^4 \frac{1}{2v}\sqrt{uv}dv = \frac{2}{3}\left(\sqrt{8} - 1\right)\left(2 - \sqrt{3}\right). \end{aligned}$$

Concludendo i valori cercati sono

$$\overline{x} = \overline{y} = \frac{\sqrt{8}-1}{3\ln\left(\frac{4}{3}\right)}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{3}{2}-\sqrt{3}\right).$$

3. Trovare le soluzioni dell'equazione

$$x^2y'' + xy' - y = \frac{1}{x^2} \qquad (x \neq 0)$$

limitate in un intorno di infinito.

Soluzione: L'equazione in questione è un'equazione di Eulero, quindi il suo integrale generale è del tipo $Y_0(x) + y_p(x)$, con Y_0 integrale generale dell'o.d.e. omogenea associata e y_p soluzione particolare.

Cercando soluzioni dell'o.d.e. omogenea associata del tipo $|x|^\lambda$, si ottiene l'equazione

$$\lambda^2 - 1 = 0,$$

da cui

$$Y_0(x) = A|x| + \frac{B}{|x|}$$

con $A, B \in \mathbf{R}$.

Usando il metodo degli annichilatori si vede che si può cercare y_p del tipo

$$y_p(x) = \frac{C}{x^2},$$

da cui si trova $C = \frac{1}{3}$.

Le soluzioni limitate in un intorno di infinito si ottengono ponendo $A = 0$.

4. Trovare tutte le funzioni $\varphi \in C^1(\mathbf{R} \setminus \{0\})$ e positive che rendono esatta la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \varphi(x)\frac{y^2}{x}\,dx + \varphi(x)x^2y\,dy$$

su $D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x = 0\}$. Dare una formula per le primitive.

Inoltre, provare che tale forma può essere estesa ad una forma esatta su $\mathbf{R}^2$, dare una formula per le primitive.

Soluzione: Il dominio della forma ω è l'insieme D, D non è connesso, ma le sue componenti connesse $D_\pm = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \pm x > 0\}$ sono stellate, quindi condizione necessaria e sufficiente per l'esattezza di ω è che su ognuna di esse si abbia

$$0 = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \omega_1}{\partial y}(x,y) = y\left(x^2\varphi'(x) + 2x\varphi(x)\right) - 2\frac{y}{x}\varphi(x).$$

Quindi, per $y \neq 0$, φ è soluzione in $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ dell'o.d.e.

$$\varphi'(x) + \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x^3}\right)\varphi(x) = 0,$$

da cui

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_- x^{-2} \exp(-x^{-2}) & \text{se } x < 0 \\ \\ c_+ x^{-2} \exp(-x^{-2}) & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

con $c_\pm \geq 0$. Sia f una primitiva di ω su $D_\pm$, allora

$$\frac{\partial f}{\partial x} = c_\pm x^{-3} y^2 \exp(-x^{-2}),\ \frac{\partial f}{\partial y} = c_\pm y \exp(-x^{-2})$$

da cui si vede "al volo" che

$$f(x,y) = \frac{c_\pm}{2} y^2 \exp(-x^{-2}) + k_\pm$$

con $c_\pm \geq 0$, $k_\pm \in \mathbf{R}$ e $(x,y) \in D_\pm$, cioè

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{c_+}{2} y^2 \exp(-x^{-2}) + k_+ & \text{se } (x,y) \in D_+ \\ \\ \frac{c_-}{2} y^2 \exp(-x^{-2}) + k_- & \text{se } (x,y) \in D_-. \end{cases}$$

Si noti che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0,$$

e ponendo $\varphi(0) = 0$ la funzione estesa risulta $C^\infty(\mathbf{R})$. Quindi, se $\omega(0,y) = 0$, si estende ω in modo $C^\infty(\mathbf{R}^2)$. Inoltre, ω risulta esatta su $\mathbf{R}^2$, con primitive date da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{c_+}{2} y^2 \exp(-x^{-2}) + k & \text{se } (x,y) \in D_+ \\ \\ k & \text{se } x = 0 \\ \\ \frac{c_-}{2} y^2 \exp(-x^{-2}) + k & \text{se } (x,y) \in D_-, \end{cases}$$

al variare di $c_\pm \geq 0$, $k \in \mathbf{R}$.

5. Sia $u = (u_1, u_2) \in C^2(\Omega, \mathbf{R}^2)$, provare che per ogni $(x,y) \in \Omega$ vale

$$\det \nabla u(x,y) = \operatorname{div}\left(u_1(x,y)\frac{\partial u_2}{\partial y}(x,y); -u_1(x,y)\frac{\partial u_2}{\partial x}(x,y)\right).$$

Quindi, calcolare

$$\iint_\Omega \det \nabla u(x,y)\, dx dy$$

dove $\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^{10} + y^{10} \leq 2\}$ e

$$u(x, y) = \left(\ln\left(1 + y^6 + x^4\right); \left(x^{10} + y^{10} - 2\right)^2\right).$$

Soluzione: La verifica della prima formula è un semplice calcolo di derivate. Per risolvere l'esercizio basta osservare che scambiando il ruolo di u_1 ed u_2 si ha una formula analoga

$$\det\nabla u(x, y) = \mathrm{div}\left(-u_2(x, y)\frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y); u_2(x, y)\frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y)\right),$$

da cui segue

$$\begin{aligned}
&\iint_\Omega \det\nabla u(x, y) dx dy \\
&\quad = \iint_\Omega \mathrm{div}\left(-u_2(x, y)\frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y); u_2(x, y)\frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y)\right) dx dy \\
&\quad = \int_{\partial^+\Omega} \left(-u_2(x, y)\frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y); u_2(x, y)\frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y)\right) \cdot \nu \, ds,
\end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio segue dal Teorema della Divergenza. Per concludere basta osservare che $u_2(x, y) = 0$ per ogni $(x, y) \in \partial\Omega$, da cui

$$\iint_\Omega \det\nabla u(x, y) dx dy = 0.$$