

**CORSO di LAUREA in FISICA
ANALISI MATEMATICA 2**

Prova Scritta Parziale

21 Dicembre 2001

1. Studiare l'andamento qualitativo della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan(x^4 + y^4 - 1) \\ y(0) = y_0 \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

2. Calcolare le coordinate del baricentro della lamina sottile rappresentata dal dominio Ω unione dell'insieme

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : 3x \leq y \leq 4x, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x} \right\}.$$

e del suo simmetrico D' rispetto la retta $y = x$.

3. Trovare le soluzioni dell'equazione

$$x^2 y'' + xy' - y = \frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

limitate in un intorno di infinito.

4. Trovare tutte le funzioni $\varphi \in C^1(\mathbf{R} \setminus \{0\})$ e positive che rendono esatta la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \varphi(x) \frac{y^2}{x} dx + \varphi(x) x^2 y dy$$

su $D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x = 0\}$. Dare una formula per le primitive.

Inoltre, provare che tale forma può essere estesa ad una forma esatta su $\mathbf{R}^2$, dare una formula per le primitive.

5. Sia $u = (u_1, u_2) \in C^2(\Omega, \mathbf{R}^2)$, provare che per ogni $(x, y) \in \Omega$ vale

$$\det \nabla u(x, y) = \operatorname{div} \left(u_1(x, y) \frac{\partial u_2}{\partial y}(x, y); -u_1(x, y) \frac{\partial u_2}{\partial x}(x, y) \right).$$

Quindi, calcolare

$$\iint_{\Omega} \det \nabla u(x, y) dx dy$$

dove $\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^{10} + y^{10} \leq 2\}$ e

$$u(x, y) = \left(\ln(1 + y^6 + x^4); (x^{10} + y^{10} - 2)^2 \right).$$