

CORSO di LAUREA in FISICA
ANALISI MATEMATICA 2

Prova Scritta

4 Febbraio 2002

1. Fissati (x_o, y_o) in $(0, +\infty) \times (0, \pi)$ trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{3x^2 e^x + (1-x) \cos(y)}{x \sin(y)} \\ y(x_o) = y_o, \end{cases}$$

e studiarne l'intervallo massimale di esistenza.

2. Sia $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + y^2$, determinare estremo inferiore e superiore di tale funzione sull'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}.$$

3. Calcolare la superficie della porzione del toro di equazione cartesiana

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - 3\right)^2 + z^2 = 1,$$

interna al cono di equazione cartesiana

$$3z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

4. Sia Ω un aperto regolare di $\mathbf{R}^n$, $f \in C^2(\Omega)$ e $g \in C^1(\Omega)$. Provare che se A è una matrice $n \times n$ allora

$$\int_{\Omega} (A \nabla f, \nabla g) dx = - \int_{\Omega} g \operatorname{div} (A \nabla f) dx + \int_{\partial \Omega} g (A^t \nu, \nabla f) d\sigma.$$

(Con $(\cdot, \cdot)$ si indica il prodotto scalare di $\mathbf{R}^n$, con A^t la matrice trasposta di A).

5. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n \geq 0} n x^{5n} \sin \left(\frac{|x|}{n^2} \right).$$