ESERCIZIO 1: Sia

$$f(x) = \left| \operatorname{atn}^2(\ln x) + \frac{\pi}{2}\operatorname{atn}(\ln x) - 1 \right|$$

$f \in C^0((0,+\infty))$, $\operatorname{Dom} f = (0,+\infty)$, se poi

$$g(t) = t^2 + \frac{\pi}{2} t - 1$$

allora

$$f(x) = |g(\operatorname{atn}(\ln x))|$$

Poiché:

$$g(t) = \left(t + \frac{\pi}{4}\right)^2 - 1 - \frac{\pi^2}{16} = \left(t + \frac{\pi}{4} - \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{16}}\right)\left(t + \frac{\pi}{4} + \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{16}}\right)$$

e $\operatorname{atn} s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\forall s \in \mathbb{R}$, si trova che

$$f(x) = 0 \iff \operatorname{atn}(\ln x) = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{16}} - \frac{\pi}{4} \in (0,1)$$

$$\iff x = \exp\left(\operatorname{tg}\left(\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{16}} - \frac{\pi}{4}\right)\right) =: \alpha \in (1, e^{4/3})$$

Essendo $f(x) \geq 0$ $\forall x \in (0,+\infty)$, $x = \alpha$ è punto di minimo assoluto.

Si ha:

$$\lim_{x \to 0^+} f \overset{y = \ln x}{=} \lim_{y \to -\infty} |g(\operatorname{atn} y)| \overset{z = \operatorname{atn} y}{=} \lim_{z \to -\frac{\pi}{2}} |g(z)|$$

$$= \left|g\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{4} - 1\right| = +1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f = \lim_{y \to +\infty} |g(\operatorname{atn} y)| = \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} |g(z)|$$

$$= \left|g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4} - 1 = \frac{\pi^2}{2} - 1$$

quindi f ha asintoto orizzontale $y = \frac{\pi^2}{2} - 1$ a $+\infty$.

Se $x \in (0,+\infty) \setminus \{\alpha\}$, f è derivabile in x, anzi f è $C^\infty((0,+\infty) \setminus \{\alpha\})$, con

$$f'(x) = \frac{g'(\operatorname{atn}(\ln x))}{x(1 + \ln^2 x)} \cdot \operatorname{sgn}(g(\operatorname{atn}(\ln x)))$$

Essendo $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ si trova che:

$$\lim_{x \to \alpha^\pm} f' = \pm \frac{g'\left(\sqrt{1+\frac{\pi^2}{16}} - \frac{\pi}{4}\right)}{\alpha\left(1+\operatorname{tg}^2\left(\sqrt{1+\frac{\pi^2}{16}} - \frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

e quindi che $x = \alpha$ è un punto angoloso.

Inoltre:
$$\lim_{x \to 0^+} f' = +\infty$$

Per quanto riguarda i segni di f' si noti che

$$f' > 0 \iff g'(\operatorname{atn}(\ln x)) \cdot \operatorname{sgn}(g(\operatorname{atn}(\ln x))) > 0$$

Essendo $g'(t) = 2t + \frac{\pi}{2}$, si trova:

$$g'(\operatorname{atn}(\ln x)) > 0 \iff \operatorname{atn}(\ln x) > -\frac{\pi}{4} \iff x > e^{-1}$$

e ricordando che

$$g(\operatorname{atn}(\ln x)) > 0 \iff x > \alpha$$

si conclude che:

$$f' > 0 \iff x \in (0, e^{-1}) \cup (\alpha, +\infty)$$

quindi f è strettamente crescente su $(0, e^{-1}] \cup [\alpha, +\infty)$, strettamente decrescente su $[e^{-1}, \alpha]$, $x = e^{-1}$ è punto di massimo relativo. Dato che

$$f(e^{-1}) = |g(\operatorname{atn}(-1))| = \left|g\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right| = \left|\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi^2}{8} - 1\right|$$
$$= \frac{\pi^2}{16} + 1 < \frac{\pi^2}{2} - 1$$

f non ha massimo su $(0, +\infty)$.

Per quanto riguarda la derivata seconda, se $x \in (0,+\infty) \setminus \{\alpha\}$ si ottiene: ③

$$f''(x) = \left[\frac{g''(\operatorname{atn}(\ln x))}{x^2(1+\ln^2 x)^2} - \frac{g'(\operatorname{atn}(\ln x))}{x^2(1+\ln^2 x)^2}(1+\ln^2 x+2\ln x)\right]$$

$$\cdot \operatorname{sgn}(g(\operatorname{atn}(\ln x)))$$

$$= \frac{\operatorname{sgn}(g(\operatorname{atn}(\ln x)))}{x^2(1+\ln^2 x)^2} \cdot \Big[2 - \underbrace{\left(2\operatorname{atn}(\ln x)+\frac{\pi}{2}\right)\overbrace{(1+\ln^2 x+2\ln x)}^{(\ln x+1)^2}}_{\varphi(x):=} \Big]$$

Si noti che $\varphi(x) > 0 \iff x > e^{-1}$, se $\ln x > 0$ ($\iff x > 1$) φ è crescente essendo composizione di funzioni crescenti, quindi:

$$\varphi(x) \geq \varphi(1) = \frac{\pi}{2} \quad \forall x > 1$$

$\Rightarrow \exists! \beta \in (1,+\infty) : \varphi(\beta) = 2$

L'unicità di β su $(1,+\infty)$ è conseguenza della stretta crescenza di φ.

In realtà, $\beta \in (1, \alpha)$ dato che: $\varphi(\alpha) > 2$

Infine su $[e^{-1}, 1]$:

$$\varphi'(x) = \frac{2(\ln x+1)^2}{x(\ln^2 x+1)} + \left(2\operatorname{atn}(\ln x)+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{2}{x}\cdot(\ln x+1)$$

$$= \frac{2}{x}(\ln x+1)\left[\frac{\ln x+1}{\ln^2 x+1} + 2\operatorname{atn}(\ln x)+\frac{\pi}{2}\right]$$

ed essendo ogni termine positivo strettamente se $x \in (e^{-1}, 1]$, si deduce che $\varphi(x) \leq \varphi(1) = \frac{\pi}{2} < 2$.

Quindi:

$$\varphi(x) < 2 \text{ su } (0,\beta)$$

$$\varphi(x) > 2 \text{ su } (\beta,+\infty)$$

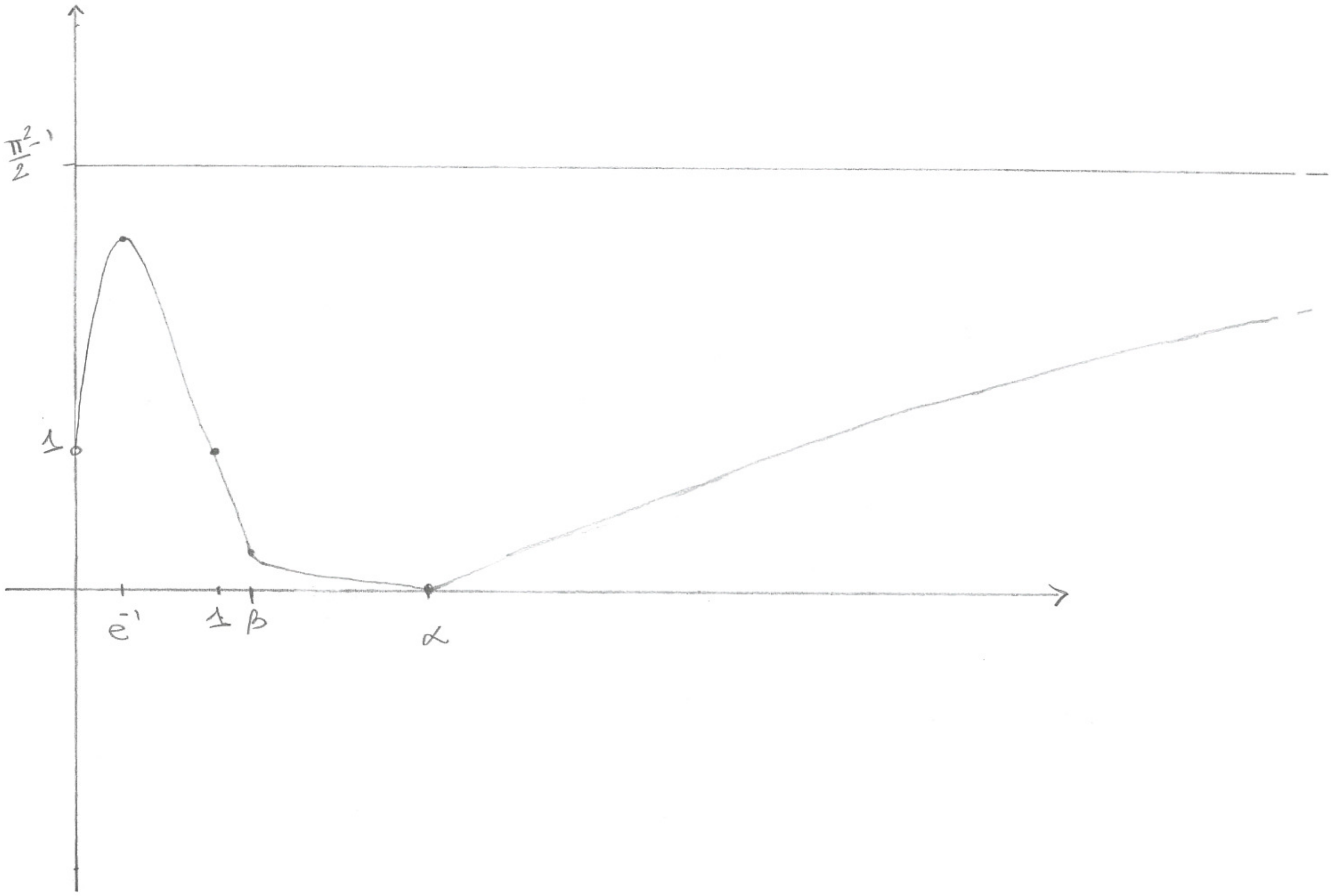
In conclusione:

$$f'' > 0 \iff \operatorname{sign}(g(\operatorname{atn}(\ln x)))\cdot(2-\varphi(x)) > 0$$

$$\iff x \in (\beta, \alpha)$$

$x=\beta$ flesso a tg obliqua.

f convessa $\iff x \in (\beta,\alpha)$



ESERCIZIO 2: Calcolare

$$I := \int_1^2 e^{2x+1} \operatorname{atn}(e^x + 3)\, dx$$

Con la sostituzione $y = e^x$ si trova

$$I = \int_e^{e^2} e \cdot y^{\cancel{2}} \operatorname{atn}(y+3) \frac{dy}{\cancel{y}}$$

integrando per parti si ottiene

$$I = e\left[\frac{y^2}{2} \operatorname{atn}(y+3)\Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{y^2}{2} \frac{1}{(y+3)^2+1}\, dy \right]$$

$$= \frac{e}{2}\left(e^4 \operatorname{atn}(e^2+3) - e^2 \operatorname{atn}(e+3) \right)$$

$$- \frac{e}{2} \underbrace{\int_e^{e^2} \frac{y^2}{y^2+6y+10}\, dy}_{I_1 :=}$$

Per determinare I_1 si osserva che: $\dfrac{y^2}{y^2+6y+10} = 1 - \dfrac{6y+10}{y^2+6y+10}$

$$I_1 = e^2 - e - 3\int_e^{e^2} \frac{2y+6}{y^2+6y+10}\, dy + 8\int_e^{e^2} \frac{1}{y^2+6y+10}\, dy$$

$$= e^2 - e - 3 \ln(y^2+6y+10)\Big|_e^{e^2} + 8 \operatorname{atn}(y+3)\Big|_e^{e^2}$$

$$= e^2 - e - 3 \ln\left(\frac{(e^2+3)^2+1}{(e+3)^2+1} \right) + 8\left(\operatorname{atn}(e^2+3) - \operatorname{atn}(e+3) \right)$$

In conclusione

$$I = \frac{e}{2}\left[(e^4-8)\operatorname{atn}(e^2+3) - (e^2-8)\operatorname{atn}(e+3) - e^2 + e + 3 \ln\left(\frac{(e^2+3)^2+1}{(e+3)^2+1} \right) \right]$$

ESERCIZIO 3: Determinare, se esiste, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ t.c.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x - \operatorname{tg} x - 1} + \sin\left(\frac{x^3}{2e}\right)}{x\left(1 - \cos(\operatorname{atn}(\alpha x^2))\right)} = 42. \quad (*)$$

Il denominatore risulta essere infinitesimo in $x = 0$ con sviluppo di Taylor:

$$x\left(1 - \cos(\operatorname{atn}(\alpha x^2))\right) = \frac{\alpha^2}{2} x^5 + o(x^5) \quad x \to 0$$

che segue dai limiti notevoli:

$$\frac{1 - \cos t}{t^2} \xrightarrow{t \to 0} \frac{1}{2}, \quad \frac{\operatorname{atn} t}{t} \xrightarrow{t \to 0} 1.$$

Il numeratore invece non è infinitesimo:

$$e^{\sin x - \operatorname{tg} x - 1} + \sin\left(\frac{x^3}{2e}\right) \xrightarrow{x \to 0} e^{-1}$$

Quindi il quoziente: $\dfrac{e^{\sin x - \operatorname{tg} x - 1} + \sin\left(\frac{x^3}{2e}\right)}{x\left(1 - \cos(\operatorname{atn}(\alpha x^2))\right)}$ non ha limite in $x = 0$.

In conclusione, non esiste alcun $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ per cui $(*)$ risulti vera.

ESERCIZIO 4: Discutere al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$ la convergenza di

$$\int_1^{\infty}\underbrace{\frac{\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)}{\ln(x-1)}\left|\operatorname{tg}\frac{1}{x}+\operatorname{th}\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\right|^{\alpha}}_{f(x):=}dx$$

si noti che $f\in C^0((1,+\infty)\setminus\{2\})$, $f>0$ se $x\in(1,2)$ e $f<0$ se $x\in(2,+\infty)$.

Inoltre in $x=1$ si ha che $\frac{\pi}{x}\xrightarrow{x\to 1}\pi$, quindi:

$$\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{x}-\pi+\pi\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{x}\right)=\underbrace{\pi-\frac{\pi}{x}}_{=\frac{\pi}{x}(x-1)}+o(x-1)\quad x\to 1$$

da cui:

$$\frac{\ln\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)}{\ln(x-1)}=\frac{\ln\frac{\pi}{x}+\ln(x-1)}{\ln(x-1)}\xrightarrow{x\to 1^+}1$$

e quindi:

$$\lim_{x\to 1^+}f=|\operatorname{tg}1+\operatorname{th}1-2|^{\alpha}.$$

f può essere estesa con continuità in $x=1$ e quindi risulta integrabile su $(1,\frac{3}{2})$.

Analogamente, se $x=2$: $\frac{\pi}{x}\xrightarrow{x\to 2}\frac{\pi}{2}$, da cui:

$$\sin\frac{\pi}{x}=\sin\left(\frac{\pi}{x}-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{x}-\frac{\pi}{2}\right)=1-\underbrace{\frac{\left(\frac{\pi}{x}-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}}_{=\frac{\pi^2}{8x^2}(2-x)^2}+o((x-2)^3)\quad x\to 2$$

da cui:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)}{\ln(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{-\frac{\pi^2}{8x^2}(x-2)^2+o((x-2)^3)}{x-2+o(x-2)}=0.$$

Quindi f può essere estesa con continuità in $x=2$, f risulta integrabile in $(\frac{3}{2},3)$.

Come già osservato $f<0$ su $(2,+\infty)$, quindi esiste (finito o $-\infty$)

$$\int_3^{+\infty}f(x)dx$$

Inoltre:

$$\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}} \xrightarrow{x \to +\infty} 1$$

da cui

$$\frac{\ln\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)}{\ln(x-1)} = \frac{\ln\pi - \ln x + \ln\left(\cancelto{1}{\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}}\right)}{\ln x + \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} \xrightarrow{x \to +\infty} -1$$

e per confronto asintotico l'integrale di f ha lo stesso carattere di quello di

$$g(x) = -\left|\operatorname{tg}\frac{1}{x} + \operatorname{th}\frac{1}{x} - \frac{2}{x}\right|^{\alpha}$$

Infine poiché:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{x} + \operatorname{th}\frac{1}{x} - \frac{2}{x} = \frac{4}{15}\frac{1}{x^5} + o\left(\frac{1}{x^6}\right)$$

l'integrale di g converge se e solo se $5\alpha > 1$.