

ESERCIZIO 1:

(1)

Dimostrare che $2^m m! \leq m^m$ per ogni $m \geq 6$.

La disuguaglianza è vera per $m=6$:

$$2^6 \cdot 6! \leq 6^6 \Leftrightarrow 6! \leq 3^6 \Leftrightarrow \cancel{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{2} \cdot 2 \leq 3^6$$

$$\Leftrightarrow 80 \leq 81$$

Supponiamo quindi dato $m \geq 6$: $2^m \cdot m! \leq m^m$ e proviamo che allora

$$2^{m+1} \cdot (m+1)! \leq (m+1)^{m+1}$$

Infatti:

Hp induttiva

$$2^{m+1} \cdot (m+1)! = 2(m+1) \cdot 2^m \cdot m! \stackrel{\downarrow}{\leq} 2(m+1) \cdot m^m$$

quindi la disuguaglianza cercata segue se

$$2(m+1) \cdot m^m \leq (m+1)^{m+1}$$

Quest'ultima è vera $\forall m \geq 1$, infatti:

$$2(m+1) \cdot m^m \leq (m+1)^{m+1} \Leftrightarrow 2m^m \leq (m+1)^m$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

La tesi delle disuguaglianze di Bernoulli.

Dimostriamo che $m^m \leq 3^m \cdot m!$ $\forall m \geq 1$.

Se $m=1$ si ha $1^1 = 1 \leq 3^1 \cdot 1! = 3$.

Sia $m \geq 1$ t.c. $m^m \leq 3^m \cdot m!$, proviamo che $(m+1)^{m+1} \leq 3^{m+1} \cdot (m+1)!$

Infatti:

$$3^{m+1} \cdot (m+1)! = 3(m+1) \cdot 3^m \cdot m! \geq 3(m+1) \cdot m^m$$

La tesi se $3(m+1) \cdot m^m \geq (m+1)^{m+1} \Leftrightarrow 3 \geq \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, per
moltiplicare che segue usando il Binomio di Newton.

ESERCIZIO 2: Verificare mediante la definizione ⁽²⁾ di limite che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}_{f(x)} \operatorname{tg} \sqrt{x} = 0$$

Osserviamo che $f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$; inoltre se

$x \in [0, \frac{1}{2})$: $0 < \frac{1+x}{1-x} \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-x} \leq \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$

quindi:

$$0 \leq f(x) \leq \sqrt{3} \operatorname{tg} \sqrt{x} \quad x \in [0, \frac{1}{2})$$

Sia dato $\varepsilon > 0$:

$$\sqrt{3} \operatorname{tg} \sqrt{x} < \varepsilon \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \operatorname{atan}^2 \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$$

e a maggior ragione si conclude

$$|f(x)| = f(x) < \varepsilon \quad \text{se} \quad 0 \leq x \leq \delta_\varepsilon := \operatorname{atan}^2 \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$$

ESERCIZIO 3: Calcolare il valore di

(3)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(\frac{e}{e^{\cos \frac{3}{x}}} - 1 \right)}_{a(x) :=} \cdot \underbrace{\ln \left(e^{x^2} + x^{x^2} \cdot \sin(e^{x^4} + \sin(x)) \right)}_{b(x) :=}$$

Si noti che:

$$\frac{e}{e^{\cos \frac{3}{x}}} - 1 = e^{1 - \cos \frac{3}{x}} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 - 1 = 0$$

e ricordando il limite $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$, si ha

$$a(x) = \frac{a(x)}{\underbrace{1 - \cos \frac{3}{x}}_{x \rightarrow +\infty \rightarrow 1}} \cdot \frac{1 - \cos \frac{3}{x}}{x}$$

Dal limite $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$, si conclude:

$$a(x) = \frac{a(x)}{1 - \cos \frac{3}{x}} \cdot \frac{1 - \cos \frac{3}{x}}{\frac{9}{x^2}} \cdot \frac{9}{x^2} = \alpha(x) \cdot \frac{9}{x^2}$$

$$\text{con } \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = \frac{1}{2}.$$

Poiché: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty \quad \forall \alpha$, si deduce che

$$\begin{aligned} b(x) &= \ln \left(e^{x^2} \cdot \left(1 + \frac{x^{x^2}}{e^{x^2}} \cdot \sin(e^{x^4} + \sin(x)) \right) \right) \\ &= x^2 + \ln \left(1 + \frac{x^{x^2}}{e^{x^2}} \cdot \sin(e^{x^4} + \sin(x)) \right) \end{aligned}$$

e quindi $\lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = +\infty$ ed anche

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b(x)}{x^2} = 1$$

④

In conclusion

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) \cdot b(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x(x) \cdot \frac{9}{x^2} \cdot x^2 \cdot \frac{b(x)}{x^2} \right] \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

ESERCIZIO 4: $\sum a_n$

(5)

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(-x)^n (e^{x^{2n}} - \cos(x^{3n}))}_{a_n(x) :=} \frac{1}{n} \text{ converge} \right\}$$

Se $|x| > 1$:

$$a_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

dato che

$$\begin{aligned} |a_n(x)| &= \frac{1}{n} \left| (-x)^n e^{x^{2n}} \right| \cdot \left(\frac{1 - \cos(x^{3n})}{e^{x^{2n}}} \right) \\ &= \frac{|x|^n e^{x^{2n}}}{n} \cdot (1 + o(1)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \end{aligned}$$

Se invece $|x| \leq 1$:

$$|a_n(x)| \leq |x|^n (e^{x^{2n}} + \cos(x^{3n})) \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{e+1}{n}$$

quindi è verificata la condizione necessaria per la convergenza.

Se $|x| \leq 1$: $|a_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n} \cdot (e+1) \leq (e+1) \frac{|x|^n}{n}$,

quindi la serie converge per confronto con la serie geometrica.

Se $x = 1$: $a_n(1) = (-1)^n (e - \overbrace{\cos 1}^{>0}) \frac{1}{n}$

e la serie converge per il criterio di Leibniz.

Se $x = -1$: $a_n(-1) = 1^n (e - \overbrace{\cos((-1)^n)}^{=\cos 1}) \cdot \frac{1}{n} = (e - \cos 1) \cdot \frac{1}{n}$

e quindi la serie diverge per confronto asintotico.

trici con $\frac{1}{n}$.

(6)

Quindi: $A = (-1, 1]$, da cui

$$\sup A = \max A = 1$$

$$\inf A = -1$$