ESERCIZIO 1: Si noti che $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ e che

$$f(x) = \underbrace{\int_0^x \underbrace{\left((1+t^2)^{\frac{2}{\pi}} - t^2\right)}_{g(t):=} dt}_{F(x):=} - \int_0^1 g(t)\,dt$$

basta quindi studiare le proprietà di F.

Poiché $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, lo è anche F. Inoltre, essendo g pari F è dispari. Quindi studieremo F solo su $[0,\infty]$.

Poiché $2<\pi$ si ha $g \xrightarrow{t\to+\infty} -\infty$, da cui

$$\lim_{x\to+\infty} F = -\infty$$

anzi per il teorema di de L'Hôpital $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = -\infty$.

Nota che $g(0)=1$, quindi $F(x)>0$ in un intorno dell'origine. Lo studio degli zeri di F verrà fatto in seguito.

Dal Teorema Fondamentale del Calcolo

$$F'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

inoltre

$$g'(x) = \frac{2}{\pi}(1+x^2)^{\frac{2}{\pi}-1} \cdot 2x - 2x = \frac{4}{\pi}x\underbrace{\left(\underbrace{(1+x^2)^{\overbrace{\frac{2}{\pi}-1}^{<0}}}_{<1} - \frac{\pi}{2}\right)}_{<0}$$

quindi

$$g'(x) \geq 0 \iff x \leq 0$$

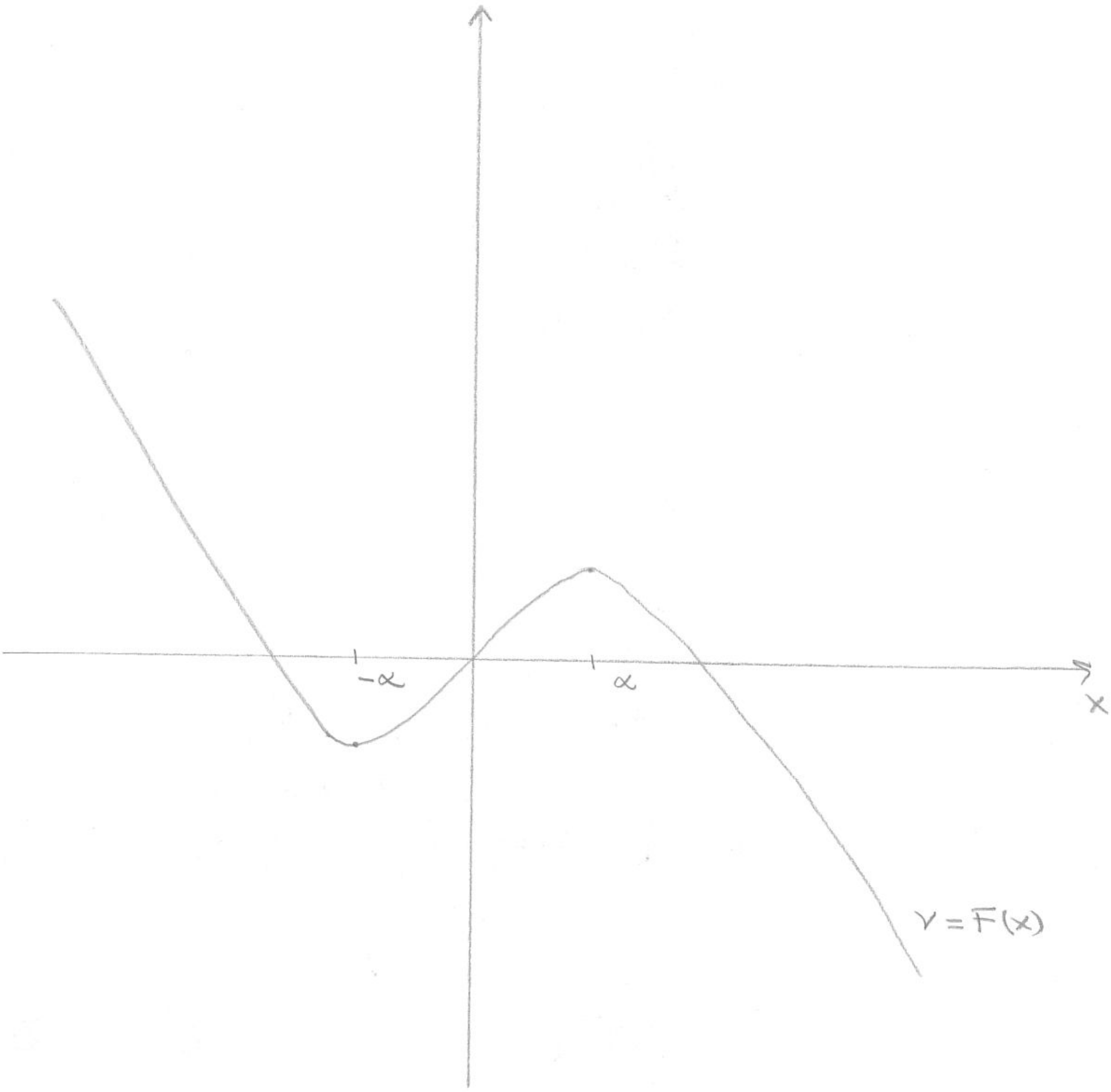
da cui si deduce che

$\exists!\, \alpha > 0$ t.c. $g(\alpha)=0 \implies \alpha$ punto di massimo relativo per F

F è concava su $[0,\infty)$

$x=0$ è punto di flesso a tangente obliqua

Nota che essendo $g(1) = 2^{2/\pi} - 1 > 0$, allora $\alpha > 1$.



Il grafico di f si ottiene traslando in basso di $\int_0^1 g$ quello di F.

ESERCIZIO 2 :

$$I := \int e^{2x+1} \operatorname{atn}(e^x+1)\,dx \overset{y=e^x}{=} e \int y \operatorname{atn}(y+1)\,dy =$$

$$e\left(\frac{y^2}{2} \operatorname{atn}(y+1) - \frac{1}{2}\int \frac{y^2}{(y+1)^2+1}\,dy \right)$$

Poiché:

$$\frac{y^2}{(y+1)^2+1} = \frac{y^2}{y^2+2y+2} = 1 - \frac{2y+2}{y^2+2y+2}$$

si ha

$$I = \frac{e^{2x+1}}{2} \operatorname{atn}(e^x+1) - \frac{1}{2} e^x + \int \frac{y+1}{(y+1)^2+1}\,dy$$

$$= \frac{e^{2x+1}}{2} \operatorname{atn}(e^x+1) - \frac{e^x}{2} + \frac{1}{2} \ln\left((e^x+1)^2+1\right) + \text{costante}$$

ESERCIZIO 3: Studiamo separatamente numeratore e denominatore:

$$e^{\sin x} - e^{tg x} + \pi\left(\cos\sqrt{x^3} - 1\right) =$$

$$\sin x - tg x + \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{tg^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{3!} - \frac{tg^3 x}{3!} + \pi\left(-\frac{x^3}{2} + o(x^{9/2})\right)$$

$$= -\frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \frac{\pi}{2}x^3 = -\frac{\pi+1}{2}x^3 + o(x^3) \quad x \longrightarrow 0$$

$$\sin(2x)\cos x - tg(2x) + \pi x^3 = tg(2x)\left(\cos(2x)\cdot\cos x - 1\right) + \pi x^3$$

$$= \left(2x + o(x^2)\right)\left(\underbrace{\left(1-2x^2+o(x^3)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)}_{= 1 - \frac{x^2}{2} - 2x^2 + o(x^3)} - 1\right) + \pi x^3$$

$$= \left(2 + o(x)\right)\left(-\frac{5}{2} + o(x)\right)^2 x^3 + \pi x^3 = (\pi - 5)x^3 + o(x^4)$$

da cui si deduce che il limite in questione vale

$$\frac{\pi+1}{2(5-\pi)}$$

ESERCIZIO 4: Sia

$$f(x) = \frac{\ln(\ln(\sqrt{x}+1)+1)}{\left(\operatorname{ch}(\operatorname{ch}x-1)-1\right)^{\alpha}} \cdot \operatorname{sh} x \in C^{\infty}((0,\infty))$$

Dai limiti notevoli del logaritmo e delle funzioni iperboliche si trova che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\underbrace{\frac{\ln(\ln(\sqrt{x}+1)+1)}{\ln(\sqrt{x}+1)}}_{\xrightarrow{x\to 0} 1} \cdot \underbrace{\frac{\ln(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}}_{\xrightarrow{x\to 0} 1} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sh} x}{x}}_{\xrightarrow{x\to 0} 1} \cdot x^{3/2}}{\left(\underbrace{\frac{\operatorname{ch}(\operatorname{ch}x-1)-1}{(\operatorname{ch}x-1)^2}}_{\xrightarrow{x\to 0} 1/2} \underbrace{\left(\frac{\operatorname{ch}x-1}{x^2}\right)}_{\xrightarrow{x\to 0} 1/2}^{2}\right)^{\alpha} \cdot x^{4\alpha}}$$

$$= \left(8^{\alpha}+o(1)\right) x^{\frac{3}{2}-4\alpha}$$

quindi f ha integrale improprio su $(0,1)$ convergente se e solo se

$$\frac{3}{2}-4\alpha > -1 \iff \alpha < \frac{5}{8}$$

Ricordando le espressioni esplicite del seno e coseno iperbolico si trova che:

$$\frac{\operatorname{sh}x}{e^{x}} \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{1}{2}, \quad \frac{\operatorname{ch}(\operatorname{ch}x-1)-1}{\exp\left(\frac{e^{x}}{2}\right)} \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{1}{2}$$

quindi

$$f(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)\ln(\ln x)\cdot e^{x}}{\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)^{\alpha}\cdot \exp\left(\frac{\alpha}{2}e^{x}\right)} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$$

$$\iff \alpha > 0$$

In tale caso l'integrale su $(1,\infty)$ è convergente per confronto con $h(x) = e^{-x}$.