ESERCIZIO 1: Sia

$$f(x)=\left|\left|\sin\left(4\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\right)\right|-2\right|$$

$\mathrm{Dom} f=\mathbb{R}$ e $f\in C^0(\mathbb{R})$. Inoltre, f è pari quindi se ne studiamo le proprietà solo per $x\geq 0$.
Poiché $\forall t\in\mathbb{R}$ $|\operatorname{sen} t|\leq 1$, si ha

$$f(x)=2-\left|\sin\left(4\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\right)\right|\in[1,2]$$

e poiché

$$\frac{x^2-1}{x^2+1}=1-\frac{2}{x^2+1}$$

l'argomento del seno è una funzione strettamente crescente su $[0,+\infty)$ da -4 a 4.
Essendo $4\in(\pi,\frac{3}{2}\pi)$ si conclude che

$$\left|\sin\left(4\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\right)\right|=\begin{cases}\sin\left(4\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\right) & 0\leq x\leq\alpha,\ 1\leq x\leq\beta\\[2ex] -\sin\left(4\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\right) & \alpha\leq x\leq 1,\ x\geq\beta\end{cases}$$

con

$$4\,\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}=-\pi \iff \alpha=\sqrt{\frac{8}{4+\pi}-1}$$

$$4\,\frac{\beta^2-1}{\beta^2+1}=\pi \iff \beta=\sqrt{\frac{8}{4-\pi}-1}$$

α,β e $x=1$ sono di massimo assoluto per f, i punti di minimo assoluto si trovano risolvendo

$$\left|\operatorname{sen} 4\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\right|=1 \iff 4\,\frac{x^2-1}{x^2+1}\in\left\{\pm\frac{\pi}{2}\right\}$$

da cui

$$\gamma=\sqrt{\frac{16}{8+\pi}-1},\ \delta=\sqrt{\frac{16}{8-\pi}-1}\implies \alpha<\gamma<1<\delta<\beta$$

Si noti che f ha asintoto orizzontale a $+\infty$ dato da:
$$\lim_{x\to+\infty} f = 2 - |\sin 4| = 2 + \sin 4 = f(0)$$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}\setminus\{\pm\alpha, \pm\beta\})$ con
$$f'(x) = -\cos\Big(\overbrace{4\Big(\frac{x^2-1}{x^2+1}\Big)}^{h(x):=}\Big)\cdot\Big(\overbrace{\frac{16x}{(x^2+1)^2}}^{h'(x)=}\Big)\cdot \operatorname{sgn}\Big[\sin\Big(4\Big(\frac{x^2-1}{x^2+1}\Big)\Big)\Big]$$
e si prova quindi facilmente che f non è derivabile nei punti $\pm\alpha, \pm\beta$.
Dall'espressione di f' si trova che su $[0,\infty)$:
$$f'(x) = 0 \iff x \in \{0, \gamma, \delta\}$$
ed inoltre su $(0,\infty)$
$$f'(x) > 0 \iff x \in (0,\alpha)\cup(\gamma,1)\cup(\delta,\beta)$$
che conferma, come già trovato, che $\alpha, 1, \beta$ sono massimi mentre γ e δ sono minimi.
Inoltre, $x=0$ risulta essere minimo relativo.

Se $x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm\alpha,\pm\beta\}$ si trova:
$$f''(x) = \Big[(h'(x))^2 \operatorname{sen}(h(x)) - h''(x)\cos(h(x))\Big]\cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{sen}(h(x)))$$
ed essendo
$$h''(x) = \frac{16}{(x^2+1)^4}\cdot\big((x^2+1)^2 - x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x\big)$$
$$= \frac{16}{(x^2+1)^4}\cdot(x^2+1)(1-3x^2)$$
si conclude
$$f''(x) = \frac{16}{(x^2+1)^4}\Big[16x^2 \operatorname{sen}(h(x)) - (x^2+1)(1-3x^2)\cos(h(x))\Big]\cdot$$
$$\cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{sen}(h(x))$$

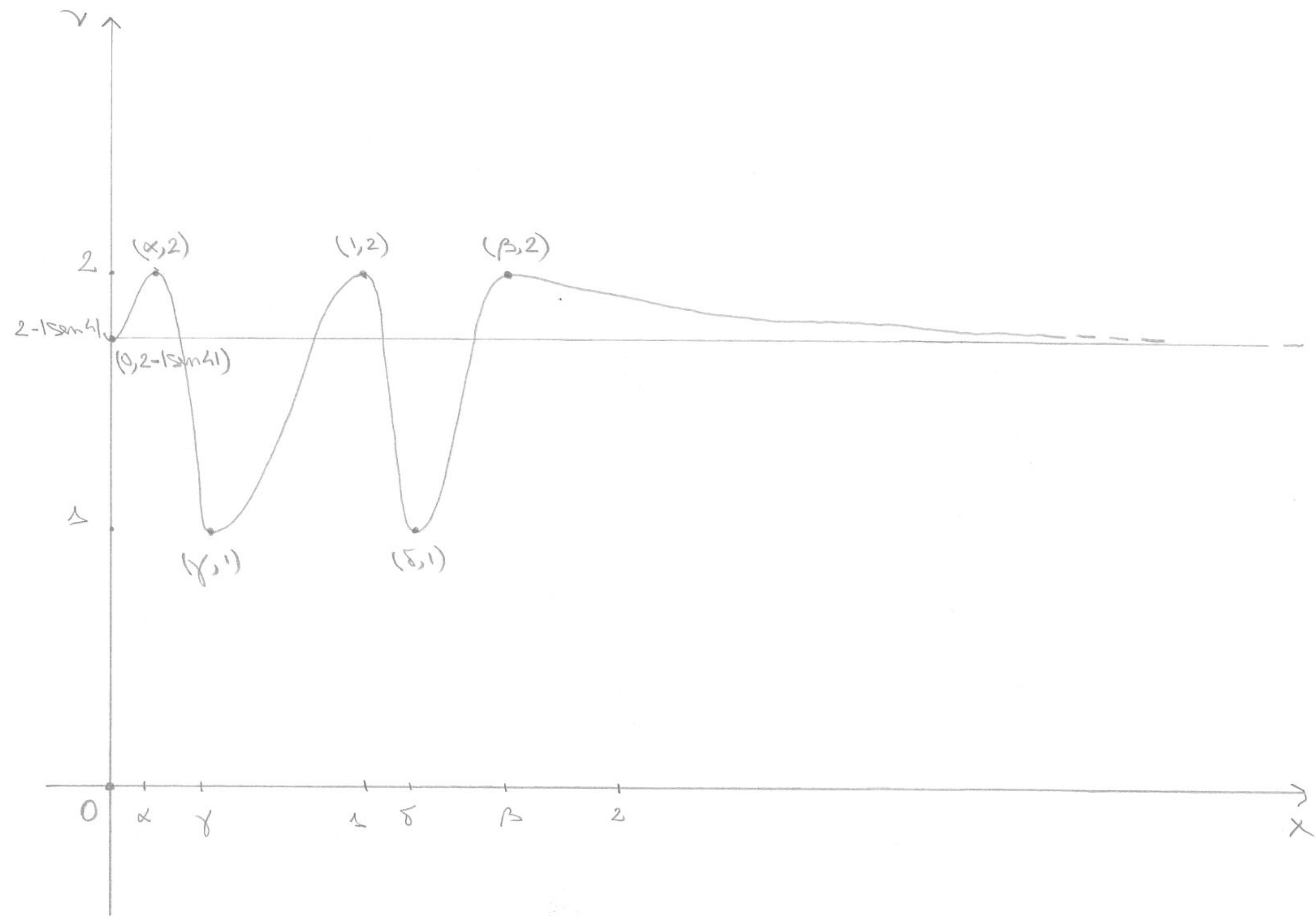
Ci limitiamo quindi ad uno studio qualitativo di f''. Per il teorema di Rolle sappiamo che $\exists\ z_1 \in (0,\alpha)$, $z_2 \in (\alpha,\gamma)$, $z_3 \in (\gamma,1)$, $z_4 \in (1,\delta)$, $z_5 \in (\delta,\beta)$ punti di flesso.

Inoltre, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f'' = -48\cos 4 = 48|\cos 4|$$

quindi $\exists\ z_6 \in (\beta,+\infty)$ in cui f'' cambia segno, cioè un altro punto di flesso.

Assumendo che gli z_i, $i\in\{1,\dots,6\}$, siano gli unici punti di flesso il grafico di f è disegnato sotto.



ESERCIZIO 2: Sia

$$f(x) = \operatorname{sen}(2x) \ln(\sin x - \cos^2 x + 2)$$
$$= 2 \operatorname{sen} x \cos x \ln(\operatorname{sen}^2 x + \sin x + 1)$$

allora con la sostituzione $y = \operatorname{sen} x$:

$$I = \int f(x)\,dx = 2\int y \ln(y^2+y+1)\,dy$$

e integrando per parti si trova

$$I = 2\left[\frac{y^2}{2}\ln(y^2+y+1) - \int \frac{y^2}{2}\,\frac{2y+1}{y^2+y+1}\,dy\right]$$

ed essendo

$$y^2(2y+1) = 2(y^3+y^2+y) - (y^2+2y) = 2(y^3+y^2+y) - (y^2+y+1) + 3y+1$$

si trova

$$\frac{y^2}{2}\,\frac{2y+1}{y^2+y+1} = y - \frac{1}{2} + \frac{3y+1}{y^2+y+1}\cdot\frac{1}{2}$$

da cui:

$$I = 2\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{3y+1}{y^2+y+1}\,dy\right]$$

$$= y^2 - y + 1 + \frac{3}{2}\ln(y^2+y+1) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^2+y+1}\,d$$

Infine, poiché: $y^2+y+1 = \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(y+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1\right]$

si ottiene

$$I = y^2 - y + 1 + \frac{3}{2}\ln(y^2+y+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{atn}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(y+\frac{1}{2}\right)\right) + c$$

e sostituendo $y = \operatorname{sen} x$ si conclude.

ESERCIZIO 3: Sia

$$f_n(x) = 2 - \left(1 - \left(\frac{x}{n}\right)^2\right)^2$$

fissato $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x}{n} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$ quindi $\lim_n f_n(x) = 1$.

Dato che

$$0 \leq \left(1 - \left(\frac{x}{n}\right)^2\right)^2 \leq 1$$

e

$$\left(1 - \left(\frac{x}{n}\right)^2\right)^2 = 0 \iff \left(\frac{x}{n}\right)^2 = 1 \iff x \in \{-n, n\}$$

i punti $x_n = n$, $y_n = -n$ sono di massimo assoluto per f_n.

In tali punti: $f_n(n) = f_n(-n) = 2$, da cui

$$\lim_n f_n(x_n) = \lim_n f_n(y_n) = 2.$$

ESERCIZIO 4: Sia

$$g(t) = \left(\operatorname{ch}\frac{1}{t}-1\right)^{16} - \left(\cos\frac{1}{t}-1\right)^{16}$$

dagli sviluppi di Taylor in $x=0$ di coseno e coseno iperbolico si ottiene che per $t \nearrow \infty$:

$$\left(\operatorname{ch}\frac{1}{t}-1\right)^{16} = \left(\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{4!\,t^4}+o\left(\frac{1}{t^5}\right)\right)^{16} = \frac{1}{2^{16}t^{32}}\left(1+\frac{1}{12t^2}+o\left(\frac{1}{t^3}\right)\right)^{16}$$

$$= \frac{1}{2^{16}t^{32}}\left(1+\frac{\cancel{16}^{4/3}}{\cancel{12}}\cdot\frac{1}{t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)$$

$$\left(\cos\frac{1}{t}-1\right)^{16} = \left(-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{4!\,t^4}+o\left(\frac{1}{t^5}\right)\right)^{16} = \frac{1}{2^{16}t^{32}}\left(1-\frac{1}{12t^2}+o\left(\frac{1}{t^3}\right)\right)^{16}$$

$$= \frac{1}{2^{16}t^{32}}\left(1-\frac{\cancel{16}^{4/3}}{\cancel{12}}\cdot\frac{1}{t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)$$

$$\Longrightarrow g(t) = \underbrace{\frac{1}{2^{16}}\cdot\frac{8^{=2^3}}{3}}_{3^{-1}\cdot 2^{-13}}\cdot\frac{1}{t^{34}}+o\left(\frac{1}{t^{34}}\right) \quad t\nearrow\infty$$

Per il criterio del confronto asintotico $\forall x\in\mathbb{R}$

$$f(x) = \int_x^{+\infty} g(t)\,dt \quad \text{converge}$$

ed essendo

$$f(x) = \lim_{k\to+\infty}\int_x^k g(t)\,dt = \lim_{k\to+\infty}\int_x^k\left(\frac{3^{-1}\cdot 2^{-13}}{t^{34}}+o\left(\frac{1}{t^{34}}\right)\right)dt$$

$$= \lim_{k\to+\infty}\left(-\frac{3^{-1}\cdot 2^{-13}}{33}\,t^{-33}\Big|_x^k\right)+o\left(\frac{1}{x^{33}}\right) = \frac{3^{-1}\cdot 2^{-13}}{33}\,\frac{1}{x^{33}}+o\left(\frac{1}{x^{33}}\right) \quad x\nearrow+\infty$$