ESERCIZIO 1: Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} (x^x-1)\ \frac{(1+x)^x-\cos x+\sin^3 x}{\ln(1+x^3\ln x)}$$

Ricordando i limiti notevoli

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1 \quad e \quad \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=0$$

poiché:

$$x^x-1=e^{x\ln x}-1 \quad e \quad \lim_{x\to 0^+} x\ln x=0$$

indicando con f la funzione di cui si vuole calcolare il limite, si ottiene

$$f(x)=\underbrace{\frac{x^x-1}{x\ln x}}_{=1+o(1)}\ \underbrace{\frac{x^3\ln x}{\ln(1+x^3\ln x)}}_{=1+o(1)\quad x\to 0}\cdot x^{-2}\left((1+x)^x-\cos x+\sin^3 x\right)$$

$$=(1+o(1))\,x^{-2}\left(e^{x\ln(1+x)}-\cos x+\sin^3 x\right)$$

$$=(1+o(1))\left(\frac{e^{x\ln(1+x)}-1}{x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin^3 x}{x^2}\right)$$

Inoltre, si ha per $x\to 0$:

$$\frac{e^{x\ln(1+x)}-1}{x^2}=\frac{e^{x\ln(1+x)}-1}{x\ln(1+x)}\cdot\frac{x\ln(1+x)}{x^2}=1+o(1)$$

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}+o(1)\quad\left(\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{\sin^3 x}{x^2}=o(1)$$

da cui: $$f(x)=(1+o(1))\left(1+\frac{1}{2}+o(1)\right)$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} f=\frac{3}{2}$$

ESERCIZIO 2: Verificare mediante la definizione che ②

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \frac{1}{2}$$

Si deve provare che:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K_\varepsilon > 0 : \ x > K_\varepsilon \Rightarrow \left| x\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

Razionalizzando:

$$x\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + x}$$

da cui:

$$x\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) - \frac{1}{2} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + x} - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\cancel{2}x - \sqrt{1+x^2} - \cancel{x}}{2\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{razionalizzato} \\ \text{nuovamente}}}{=} \frac{-1}{2\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)^2}$$

Quindi:

$$\left| x\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)^2}$$

Poiché per $x > 0$: $\sqrt{1+x^2} + x \geq x > 0$, si ha

$$\left| x\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) - \frac{1}{2} \right| \overset{x \geq 0}{\leq} \frac{1}{2x^2}$$

Inoltre, $\frac{1}{2x^2} \leq \varepsilon \Leftrightarrow |x| \geq \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$

la tesi segue scegliendo $K_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$.

ESERCIZIO 3: Sia

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n \geq 1} \left(\frac{\sqrt[n]{4} - 1}{n} \right) x^n \text{ converge} \right\}$$

si noti che $0 \in A$, da cui $A \neq \emptyset$ e $\inf A \leq 0 \leq \sup A$

Studiamo la convergenza assoluta della serie mediante il Criterio del Rapporto: $a_n = \frac{\sqrt[n]{4} - 1}{n} x^n$

$$\frac{\frac{\sqrt[n+1]{4} - 1}{n+1} |x|^{n+1}}{\frac{\sqrt[n]{4} - 1}{n} |x|^n} = \frac{\sqrt[n+1]{4} - 1}{\sqrt[n]{4} - 1} \frac{n}{n+1} \cdot |x|$$

per capire il comportamento limite di tale espressione si noti che: $\sqrt[n]{4} - 1 = e^{\frac{\ln 4}{n}} - 1$, da cui usando il limite notevole $e^t - 1 = t + o(t)$ si ha:

$$\frac{\sqrt[n+1]{4} - 1}{\sqrt[n]{4} - 1} \frac{n}{n+1} |x| = \frac{\frac{\ln 4}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{\ln 4}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \frac{n}{n+1} |x|$$

e quindi:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \xrightarrow{n \to +\infty} |x|.$$

Dal Criterio del Rapporto si deduce che:

$\sum_{n \geq 1} |a_n|$ converge se $|x| < 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} a_n$ converge $|x| < 1$

$\sum_{n \geq 1} |a_n|$ diverge se $|x| > 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} a_n$ non conv. $|x| > 1$

Quindi: $(-1, 1) \subseteq A \subseteq [-1, 1]$

Per capire se $-1, 1$ sono punti di A o meno procediamo come segue.

Se $x=-1$: $a_n = (-1)^n \frac{\sqrt[n]{4}-1}{n} = (-1)^n b_n$, con $b_n > 0$, $b_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ dato che $b_n = \frac{\ln 4}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ e b_n decrescente dato che $x \longrightarrow 4^x$ è crescente.

Per il Criterio di Leibnitz la serie

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{4}-1}{n} \text{ converge} \Rightarrow -1 \in A \Rightarrow$$

$$\inf A = \overset{\min}{\cancel{\sup}} A = -1$$

Se $x=1$: $a_n \geq 0 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ converge o diverge

<u>1° modo</u>: $a_n = \frac{\ln 4}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ $n\to+\infty$, quindi $\exists N$ t.c. $\forall n \geq N$:

$$\frac{\ln 4}{2}\frac{1}{n^2} \leq a_n \leq \frac{2\ln 4}{n^2}$$

e la serie converge per confronto con la serie di $1/n^2$.

<u>2° modo</u>: Ricordando la dimostrazione di $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{4} = 1$, si ha: $\sqrt[n]{4} = 1+h_n \Leftrightarrow 4 = (1+h_n)^n$

dalla Disuguaglianza di Bernoulli:

$$4 = (1+h_n)^n \geq 1+nh_n \Leftrightarrow 0 \leq h_n \leq \frac{3}{n}$$

quindi: $0 \leq \frac{\sqrt[n]{4}-1}{n} = \frac{h_n}{n} \leq \frac{3}{n^2}$

e di nuovo la convergenza segue dal Criterio del Confronto.

Si è provato che $1 \in A \Rightarrow \sup A = \max A = 1$

ESERCIZIO 4: Studiare $f(x) = e^x(\mathrm{tg}\,x - 1)$ su $\left(-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$.

È facile vedere che $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$ e che $f \in C^\infty(\mathrm{Dom} f)$.

f non presenta simmetrie né periodicità, d'altra parte:

$$f(x+\pi) = e^{x+\pi}\left(\mathrm{tg}(x+\pi) - 1\right)$$
$$= e^\pi \cdot e^x(\mathrm{tg}\,x - 1) = e^\pi f(x)$$

quindi è sufficiente studiare le proprietà locali di f su $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ per conoscerle su tutto $\mathrm{Dom} f$ ed in particolare su $\left(-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$.

Su tale intervallo si ha:

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f = -\infty, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f = +\infty$$

in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $x \to \mathrm{tg}\,x$ è crescente strettamente

Inoltre, $f(x) \geq 0 \iff \mathrm{tg}\,x \geq 1 \iff x \geq \mathrm{atn}\,1 = \frac{\pi}{4}$

Dalla discussione fatta prima: se $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = e^x(\mathrm{tg}\,x - 1 + \mathrm{tg}^2 x + 1) = e^x(\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}^2 x)$$

quindi $f'(x) \geq 0 \iff \mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}^2 x \geq 0 \iff$

$\mathrm{tg}\,x \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty) \iff$

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

f strettamente crescente $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

" " " decrescente $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$

da cui: $x = -\frac{\pi}{4}$ massimo relativo

$x = 0$ minimo relativo

Dalle condizioni trovate sopra per il Teorema di Rolle $\exists\, \xi \in \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right) : f''(\xi) = 0$.
Cerchiamo di capire se ci sono altri punti in cui si annulla f'':

$$f''(x) = e^x \left(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + 1 + \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x) \right)$$
$$= e^x \left(2\operatorname{tg}^3 x + 2 \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x + 1 \right) = e^x p(\operatorname{tg} x)$$

con $p(t) = 2t^3 + 2t^2 + 3t + 1$.
Cerchiamo gli zeri di p: $p'(t) = 6t^2 + 4t + 3 \geq \frac{7}{3}$
$\Rightarrow p$ ha un unico zero (esiste per il teorema dei valori intermedi essendo $p \xrightarrow{t \to \pm\infty} \pm\infty$).
Quindi:

$$f'' \geq 0 \iff x \in \left[\xi, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$f'' \leq 0 \iff x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \xi\right]$$

$x = \xi$ flesso a tangente obliqua e
f convessa se $x \in [\xi, \pi/2)$, f concava $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \xi\right]$