

ESERCIZIO 1: Indichiamo con

①

$$I = \int \frac{x}{1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2}} dx$$

notando che $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$, con la sostituzione
ma $x-1 = \sinh t$ si ottiene:

$$I = \int \frac{\sinh t + 1}{1 + \cosh t} \cosh t dt = \int \left(\sinh t + 1 - \frac{\sinh t + 1}{1 + \cosh t} \right) dt$$
$$= \cosh t + t - \int \frac{\sinh t + 1}{\cosh t + 1} dt =: \cosh t + t - I_2.$$

Poiché $\frac{\sinh t + 1}{\cosh t + 1} = \frac{e^{2t} + 2e^t - 1}{e^{2t} + 2e^t + 1}$ con la sostituzione

$y = e^t$ si ottiene

$$I_2 = \int \frac{y^2 + 2y - 1}{y^2 + 2y + 1} \cdot \frac{1}{y} dy;$$

d'altra parte: $\frac{y^2 + 2y - 1}{y^2 + 2y + 1} \cdot \frac{1}{y} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} + \frac{C}{(y+1)^2}$

e con qualche calcolo si trova $A = -1, B = C = 2$.

Quindi:

$$I_2 = -\ln|y| + 2\ln|y+1| - \frac{2}{y+1} = -t + 2\ln(e^t + 1) - \frac{2}{e^t + 1} + C$$

$$I = \cosh t + 2\ln(e^t + 1) - \frac{2}{e^t + 1} + C$$

$$= \sqrt{x^2 - 2x + 2} + 2\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 2x + 2}\right) - \frac{2}{x + \sqrt{x^2 - 2x + 2}} + C$$

ESERCIZIO 2: Sia

(2)

$$f(x) = \frac{\ln \left| x + \frac{1}{x} \right| - 1}{\left| x + \frac{1}{x} \right|}$$

allora $\text{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f \in C^{\infty}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Inoltre, f è pari quindi ne limiteremo lo studio a $(0, +\infty)$. Per tali x si ha

$$f(x) = \frac{\ln \left(x + \frac{1}{x} \right) - 1}{x + \frac{1}{x}}$$

Inoltre:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0;$$

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln \left(x + \frac{1}{x} \right) \geq 1 \Leftrightarrow x^2 e^{x + \frac{1}{x}} - 1 \geq 0 \quad \text{=: } \beta$$

$$\Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{e - \sqrt{e^2 - 4}}{2} \quad (< 1 <) \quad \frac{e + \sqrt{e^2 - 4}}{2} \leq x \quad \text{=: } \alpha$$

Perciò f avrà un massimo relativo in $(0, \alpha)$ e in $(\beta, +\infty)$, ed un minimo relativo in (α, β) .

Infatti, se $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{2 - \ln \left(x + \frac{1}{x} \right)}{\left(x + \frac{1}{x} \right)^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)$$

quindi:

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \left(e^2 - \left(x + \frac{1}{x} \right) \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$0 < x < \frac{e^2 - \sqrt{e^4 - 4}}{2} =: \gamma \quad 1 \leq x \leq \frac{e^2 + \sqrt{e^4 - 4}}{2} =: \delta$$

quindi:

$$x = \gamma \text{ max. rel.}, \quad x = 1 \text{ min. rel.},$$

$$x = \delta \quad = \quad =$$

f strett. cresc. su $(0, \gamma] \cup [1, \delta]$

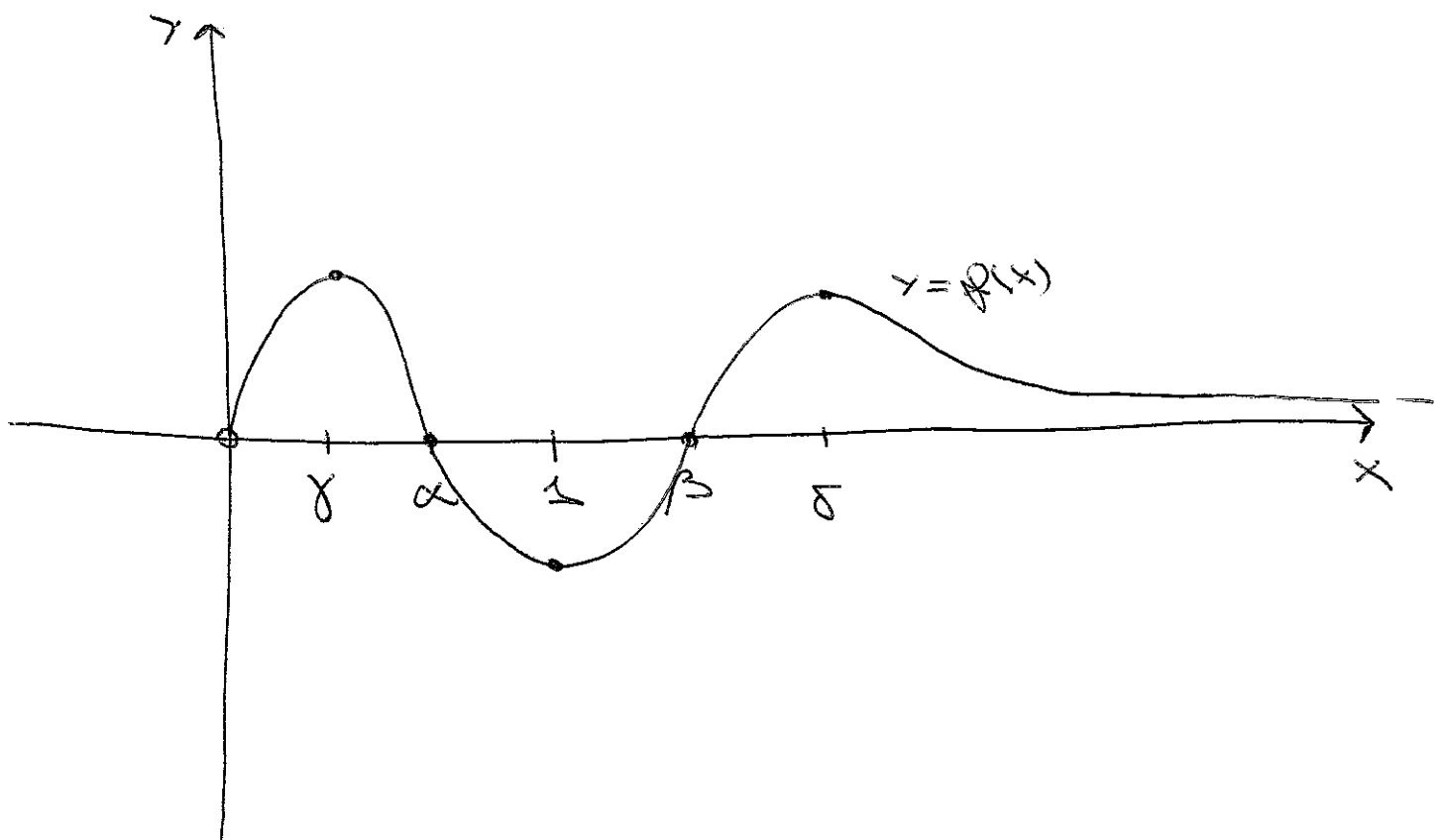
f = decresc. = $[\gamma, 1] \cup [\delta, +\infty)$

In particolare, f avrà un flessi

$\xi \in (\gamma, 1)$, un altro $\eta \in (1, \delta)$

ed infine un terzo $\mu \in (\delta, +\infty)$ per il Teorema di Rolle applicato ad f' .

Un grafico approssimativo di f è il seguente:



ESERCIZIO 3: La funzione

(4)

$$f(x) = \cos(\sin x) - \sin(\cos x)$$

è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ e vale $f(\frac{\pi}{2}) = \cos 1$.

Inoltre,

$$f'(x) = -\sin(\sin x) \cos x + \cos(\cos x) \cdot \sin x$$

da cui

$$f'(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \text{ se } x \in (\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} + \delta) \text{ per qualche } \delta > 0.$$

Quindi, f è invertibile su $(\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} + \delta)$ e per il
teorema di derivabilità della funzione inversa
l'inversa locale $g: f(\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} + \delta) \rightarrow (\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} + \delta)$ è
di classe C^∞ con:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))},$$

da cui segue:

$$g''(y) = - \frac{f''(g(y))}{(f'(g(y)))^3}.$$

Quindi si ottiene:

$$g(y) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{f'(\frac{\pi}{2})} (y - \cos 1) - \frac{f''(\frac{\pi}{2})}{(f'(\frac{\pi}{2}))^3} \frac{(y - \cos 1)^2}{2} + o((y - \cos 1)^2) \quad y \rightarrow \cos 1$$

Esempio:

$$f''(x) = -\cos(\sin x) \cdot \cos^2 x + \sin(\sin x) \cdot \sin x + \sin(\cos x) \cdot \sin^2 x + \cos(\cos x) \cdot \cos x$$

si conclude:

$$g(y) = \frac{\pi}{2} + (y - \cos 1) - \frac{\sin 1}{2} (y - \cos 1)^2 + o((y - \cos 1)^2) \quad y \rightarrow \cos 1$$

ESERCIZIO 4: Studiare il carattere dell' integrale $\textcircled{5}$
improprio

$$\int_e^{+\infty} \underbrace{\frac{|\sin(\ln(\ln x))|}{x-e} \left(\operatorname{atan}\left(\sin \frac{1}{x}\right) - \sin\left(\operatorname{atan} \frac{1}{x}\right) \right) x^2 dx}_{f(x) :=}$$

Poichè $f \in C^0((e, +\infty))$ e

$$\begin{aligned} \sin(\ln(\ln x)) &= \sin\left(\underbrace{\ln x}_{\ln\left(\frac{x}{e}\right)} - 1 + o(\ln x - 1)\right) \\ &= \sin\left(\frac{x}{e} - 1 + o\left(\frac{x}{e} - 1\right)\right) = \frac{x}{e} - 1 + o(x - e) \quad x \rightarrow e \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow e^+} f = e \left(\operatorname{atan}\left(\sin \frac{1}{e}\right) - \sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{1}{e}\right)\right) \right),$$

f è integrabile secondo Riemann in un intervallo destro di e .

Si deve quindi studiare l'integrabilità in senso improprio di f in un intervallo di $+\infty$.

Proviamo ad analizzare la convergenza asintotica, per fare ciò sviluppiamo l'espressione fra parentesi tonda in un intervallo di $+\infty$:

$$\operatorname{atan}\left(\sin \frac{1}{x}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) - \frac{1}{3x^3} \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\sin\left(\operatorname{atan} \frac{1}{x}\right) = \sin\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) - \frac{1}{6x^3} \quad x \rightarrow +\infty$$

da cui segue:

⑥

$$x^2 \left(\arctan\left(\sin\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\arctan\frac{1}{x}\right) \right) = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad x \rightarrow +\infty$$

Concludendo, dagli sviluppi precedenti si ottiene

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \frac{x^2}{x-\varepsilon} \left| \arctan\left(\sin\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\arctan\frac{1}{x}\right) \right| \\ &= o\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad x \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

quindi per il Criterio del Confronto Asintotico
e $|f|$ è sommabile in senso improprio a $+\infty$.

Per il Criterio della Convergenza Assoluta anziché
che f è sommabile in senso improprio a
 $+\infty$.