ESERCIZIO 2: (2)

$$f(x) = \frac{1}{(\operatorname{atn}^2 x - 1)^{4/3} - 1}$$

$$\operatorname{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} : \underbrace{(\operatorname{atn}^2 x - 1)^{4/3} - 1 \neq 0}\} = \mathbb{R} \setminus \{0, \pm \operatorname{tg}\sqrt{2}\}$$

$$\iff (\operatorname{atn}^2 x - 1)^4 \neq 1 \iff |\operatorname{atn}^2 x - 1| \neq 1$$

$$\iff \operatorname{atn}^2 x \neq 0 \text{ e } \operatorname{atn}^2 x \neq 2$$

f risulta di classe C^∞ sul suo dominio e pari, studieremo le sue proprietà su $(0,+\infty) \setminus \{\operatorname{tg}\sqrt{2}\}$.

Su tale insieme

$$f(x) > 0 \iff x > \operatorname{tg}\sqrt{2}$$

inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f = \lim_{x \to (\operatorname{tg}\sqrt{2})^-} f = -\infty$$

$$\lim_{x \to (\operatorname{tg}\sqrt{2})^+} f = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f = \frac{1}{\left(\frac{\pi^2}{4} - 1\right)^{4/3} - 1}$$

Dal teorema di Weierstrass si deduce quindi che f ha un massimo relativo su $(0, \operatorname{tg}\sqrt{2})$.

Se $x \in (0,+\infty) \setminus \{\operatorname{tg}\sqrt{2}\}$ si ha

$$f'(x) = \underbrace{-\frac{1}{\left((\operatorname{atn}^2 x - 1)^{4/3} - 1\right)^2}}_{= -f^2(x)} \frac{8}{3} \frac{\operatorname{atn} x}{1+x^2} (\operatorname{atn}^2 x - 1)^{1/3}$$

da cui

$$f'(x) \geq 0 \iff -\operatorname{atn} x\, (\operatorname{atn}^2 x - 1)^{1/3} \geq 0 \overset{x>0}{\iff}$$

$$\iff 1 - \operatorname{atn}^2 x \geq 0 \iff x \leq \operatorname{tg} 1$$

Quindi:

$f \nearrow\nearrow \quad x \in (0, \operatorname{tg} 1]$

$f \searrow\searrow \quad x \in (\operatorname{tg} 1, \operatorname{tg}\sqrt{2}) \cup (\operatorname{tg}\sqrt{2}, +\infty)$