ESERCIZIO 4: Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\ln(\cos x + \operatorname{ch} x) - \ln 2}{x^\alpha}}_{f_\alpha(x)} \, dx$$

Si ha $\operatorname{Dom} f_\alpha \cap (0,+\infty) = (0,+\infty)$, infatti

$$\cos x + \operatorname{ch} x \geq 1 - \frac{x^2}{2} + 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} = 2 + \frac{x^4}{4!}$$

Quindi, l'integrale è improprio perché si integra in un intorno di $+\infty$ e vicino a 0 (per $\alpha > 0$).

Se $\alpha > 0$: $\quad \cos x + \operatorname{ch} x = 2 + \dfrac{x^4}{12} + o(x^5)$

da cui:

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha} \ln\left(\frac{\cos x + \operatorname{ch} x}{2}\right) = \frac{x^{4-\alpha}}{24} + o(x^{4-\alpha})$$

quindi l'integrale di f_α fra 0 e 1 è convergente se $-4+\alpha < 1 \iff 0 < \alpha < 5$.

Invece, poiché:

$$\ln\left(\frac{\cos x + \operatorname{ch} x}{2}\right) = x + o(x) \quad x \to +\infty$$

si ha che

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{x^{\alpha-1}} + o\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right) \quad x \to +\infty$$

e quindi f_α è integrabile in senso improprio fra 1 e $+\infty$ se $\alpha - 1 > 1 \iff \alpha > 2$.

Quindi se $\alpha \in (2,5)$, l'integrale converge, altrimenti diverge.

Se $\alpha \leq 0$: ragionando come sopra si vede che f_α non è integrabile in senso improprio fra 0 e $+\infty$.