ESERCIZIO 1: Sia $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ data da

$$f(x)=\int_0^{\ln x}\ln^5(1+t^2)\,dt$$

calcolare $f^{(11)}(1)$.

Per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale f risulta $C^\infty((0,+\infty))$.

Si noti che $f(1)=0$, volendo determinare l'ordine di infinitesimo di f in $x=1$ si può ragionare così:

$$\ln^5(1+t^2)=\left(t^2+o(t^2)\right)^5=t^{10}+o(t^{10})$$

quindi

$$\int_0^{y}\ln^5(1+t^2)\,dt=\frac{y^{11}}{11}+o(y^{11})$$

da cui segue:

$$f(x)=\frac{(\ln x)^{11}}{11}+o((\ln x)^{11}).$$

Ricordando che $\ln x=x-1+o(x-1)$ si conclude

$$f(x)=\frac{(x-1)^{11}}{11}+o((x-1)^{11})$$

da cui $\dfrac{f^{(11)}(1)}{11!}=\dfrac{1}{11}\iff f^{(11)}(1)=10!$