

ESERCIZIO 1: Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e

(1)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{\operatorname{atn}((x-1)^\alpha)}{\ln^2 x} (x^{x^2-1} - 1) & x > 1 \end{cases}$$

trovare α t.c. f risulta derivabile in $x=1$.

Si cercano quindi i valori $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = 0$$

Poiché $x^{(x^2-1)} - 1 = e^{(x^2-1)\ln x} - 1$, e $(x^2-1)\ln x \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$,
dal limite notevole $e^t - 1 = t + o(t)$, si deduce

$$\frac{\operatorname{atn}((x-1)^\alpha)}{\ln^2 x} (x^{x^2-1} - 1) = \frac{\operatorname{atn}((x-1)^\alpha)}{\ln x} (x^2-1) (1+o(1))$$

Ricordando che $\ln(1+t) = t + o(t)$, $\operatorname{atn} t = t + o(t)$,
segue

$$\frac{\operatorname{atn}((x-1)^\alpha)}{\ln^2 x} (x^{x^2-1} - 1) = (x+1)(x-1)^\alpha (1+o(1))$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ 2 & \alpha = 0 \\ +\infty & \alpha < 0 \end{cases}$$

Ripetendo gli stessi passaggi si trova anche che
per $\alpha > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = \begin{cases} 0 & \alpha > 1 \\ 2 & \alpha = 1 \\ +\infty & 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

dato che

$$\frac{\operatorname{atn}((x-1)^\alpha)}{(x-1)\ln x} (x^{x^2-1} - 1) = (x+1)(x-1)^{\alpha-1} (1+o(1))$$

Quindi, f risulta derivabile se $\alpha > 1$.