

ESERCIZIO 4: Provare che $f(x) = (x(x-1))^{-1}$ è (5)
invertibile su $[1/2, +\infty)$ e studiare la conca-
vità, convessità dell'inversa.

Poichè $f \in C^0(\mathbb{R})$ si deve mostrare che f è strettamente monotona su $[1/2, +\infty)$.

Esistono $f \in C^1(\mathbb{R})$ con $f'(x) = 3((x-1)x)^2(2x-1)$
 sì che $f'(x) \geq 0$ su $[1/2, +\infty)$

con $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 1/2, 1\}$

Si risulta quindi strettamente crescente su $[1/2, +\infty)$.

Detto g l'inversa è facile convincersi gra-
ficamente che g è convessa dove f è conca-
va e viceversa.

Per provarlo analiticamente si possono seguire due strade:

1^o mod: $f \in C^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow g \in C^0((-1/64, +\infty), f(1/2) = -1/64$
 dato che $f'(1/2) = f'(1) = 0$ e $g \in C^\infty(I)$,
 $I = (-1/64, +\infty) \setminus \{0\}$ con

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}, \quad g''(x) = - \frac{f''(g(x))}{(f'(g(x)))^3}$$

Da cui: $g''(x) \geq 0 \iff g''(g(x)) \geq 0$

e quindi perché:

$$g'''(x) = 6x(x-1)(5x^2-5x+1)$$