

ESERCIZIO 3 Studiare $f(x) = \frac{x |\ln|x||}{|\ln|x||+4}$ (3)

$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f \in C^0(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, ed f dispari.
Si restringe lo studio all'intervallo $(0, +\infty)$,
nel quale $f(x) = \frac{x |\ln x|}{|\ln x|+4}$.

Ricordando che $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$,
si ottiene $\lim_{x \rightarrow 0^+} f = 0 \Rightarrow x=0$ discontinuità
eliminabile.

Inoltre, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, e
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{|\ln x|+4} = -\infty \Rightarrow$

f non ha asintoti obliqui a $+\infty$.

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$, con $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Quindi $x=1$ è punto di minimo assoluto su
 $(0, +\infty)$, relativo su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Se $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, f è di classe C^1 in x e

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{|\ln x|}{|\ln x|+4} + \frac{x}{x} \frac{4 \operatorname{sgn}(\ln x)}{(|\ln x|+4)^2} \\ &= \frac{|\ln x|^2 + 4|\ln x| + 4 \operatorname{sgn}(\ln x)}{(|\ln x|+4)^2} \end{aligned}$$