ESERCIZIO 2: Determinare tutte le primitive (2) della funzione

$$f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{x\sqrt{\ln x} - 1}$$

su $[3,+\infty)$.

Con la sostituzione $t = \ln x$ si ottiene

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{t^2+1}{\sqrt{t}-1}\,dt \overset{\text{razionalizzando}}{=} \int \frac{t^2+1}{t-1}\left(\sqrt{t}+1\right)dt$$

Poiché $\dfrac{t^2+1}{t-1} = t+1+\dfrac{2}{t-1}$, si deduce che

$$\frac{t^2+1}{t-1}\left(\sqrt{t}+1\right) = t\sqrt{t}+t+\sqrt{t}+1+\frac{2}{\sqrt{t}-1}$$

e quindi:

$$\int f(x)\,dx = \left[\frac{2}{5}t^{5/2}+\frac{t^2}{2}+\frac{2}{3}t^{3/2}+t\right]_{t=\ln x} + 2\int\frac{dt}{\sqrt{t}-1}$$

Con la sostituzione $s = \sqrt{t} \Leftrightarrow t = s^2$ si ha

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}-1}\,dt = 2\int\frac{s}{s-1}\,ds = 2s + 2\ln|s-1| + c$$

Concludendo:

$$\int f(x)\,dx = \frac{2}{5}(\ln x)^{5/2} + \frac{\ln^2 x}{2} + \frac{2}{3}(\ln x)^{3/2} + \ln x + 4(\ln x)^{1/2} + 4\ln\left|(\ln x)^{1/2}-1\right| + c$$

Si noti che dopo la prima sostituzione si può procedere prima con la sostituzione $t=s^2$ e poi usare il metodo dei fratti semplici.