ESERCIZIO 1: Studiare la convergenza della (1) serie $\sum_{n\geq 1} \left(\sin\left(e^{-\ln^{\alpha} n}\right)\right)$ al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$.

La condizione necessaria per la convergenza, $a_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, è verificata se e solo se $\alpha>0$. Per tali valori di α poiché $\frac{\sin t}{t} \xrightarrow{t\to 0} 1$, per il Thm del Confronto Asintotico la serie ha lo stesso carattere di $\sum_{n\geq 1} \underbrace{e^{-\ln^{\alpha} n}}_{\tilde{a}_n}$.

1° Modo: Si confronta con $b_n = \frac{1}{n^{\beta>0}} = e^{-\beta \ln n}$, allora:

$$\frac{\tilde{a}_n}{b_n} = e^{-\ln^{\alpha} n+\beta \ln n}$$

e poiché
$$-\ln^{\alpha} n+\beta\ln n \longrightarrow \begin{cases} -\infty & \alpha>1 \\ 0 & \alpha=\beta=1 \\ +\infty & 0<\alpha<1 \end{cases}$$

si sceglie
$$\beta\in(0,1) \text{ se } \alpha\in(0,1) \Rightarrow \sum \tilde{a}_n = +\infty$$
$$\beta\in(1,+\infty) \text{ se } \alpha\in(1,+\infty) \Rightarrow \sum \tilde{a}_n < +\infty$$
$$\beta=\alpha=1 \Rightarrow \sum \tilde{a}_n = +\infty$$

2° Modo: Si usa il Criterio di Condensazione di Cauchy dato che $\tilde{a}_n$ è decrescente e ≥ 0. Si ha:
$$2^n \tilde{a}_{2^n} = 2^n \cdot e^{-n\ln^{\alpha} 2} = e^{n(\ln 2-\ln^{\alpha} 2)}$$

e quindi
$$\alpha\in(0,1) \Rightarrow 2^n\tilde{a}_{2^n} \longrightarrow +\infty$$
$$\Rightarrow \sum \tilde{a}_{2^n}\cdot 2^n = \sum \tilde{a}_n = +\infty$$

$$\alpha\in(1,+\infty) \Rightarrow 2^n\tilde{a}_{2^n} = q^n \text{ con }$$
$$q\in(0,1) \Rightarrow \sum 2^n \tilde{a}_{2^n} < +\infty$$
$$\Rightarrow \sum \tilde{a}_n < +\infty$$