ESERCIZIO 2: Calcolare $I = \int_{-\pi}^{\pi} x\sqrt{1+\operatorname{sen} x}\, dx$

Se $F(x)$ è una primitiva di $\sqrt{1+\operatorname{sen} x}$ applicando l'integrazione per parti si ottiene

$$I = xF(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,dx$$

per concludere serve quindi ricavare F esplicitamente. Per fare ciò si può procedere in due modi:

1° modo: Si noti che

$$\sqrt{1+\operatorname{sen} x} = \left(\cos^2\frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\left(\cos\frac{x}{2} + \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left|\cos\frac{x}{2} + \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right|$$

$$= \sqrt{2}\cdot\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

Perché $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \iff \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4} \in [0,\pi] + k\pi \iff$
$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right] + 2k\pi$

si prende

$$F(x) = \int_{-\pi/2}^{x} \sqrt{1+\operatorname{sen} t}\, dt$$

e quindi:

$$F(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right) dt \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$F(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} -\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right) dt \qquad x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$$