(4)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sqrt{1+\operatorname{sen} s}\, ds = \begin{cases} -\dfrac{2(\operatorname{tg}(x/2)-1)}{(1+\operatorname{tg}^2(\frac{x}{2}))^{1/2}} - 2\sqrt{2} & x \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \\ \dfrac{2(\operatorname{tg}(x/2)-1)}{(1+\operatorname{tg}^2(x/2))^{1/2}} - 2\sqrt{2} & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases}$$

Infine, dato che: $\lim_{x \to \pm\pi} \dfrac{\operatorname{tg}(x/2)-1}{(1+\operatorname{tg}^2(x/2))^{1/2}} = \pm 1$, quindi ponendo

$$F(+\pi) = 2(1+\sqrt{2})$$
$$F(-\pi) = 2(1-\sqrt{2})$$

abbiamo trovato una primitiva di $\sqrt{1+\operatorname{sen} x}$. In realtà, abbiamo ritrovato la stessa funzione ottenuta trovata con il primo metodo.

Concludendo: da ⊛ si ottiene

$$I = \pi\left(F(\pi)+F(-\pi)\right) - \int_{-\pi}^{-\pi/2} 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-1\right)dx$$
$$- \int_{-\pi/2}^{\pi} 2\sqrt{2}\left(1-\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)dx = \pi\left(4-2\sqrt{2}\right)$$

Aggiungo un'altra soluzione viste le vostre richieste durante il compito: si usa la sostituzione $t = \operatorname{sen} x \iff x = \arcsen t$ per $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, se invece $x \in [-\pi, -\pi/2)$ allora $x = -\arcsen t - \pi$, mentre se $x \in (\pi/2, \pi]$ allora $x = -\arcsen t + \pi$. Tenendo conto di ciò si ottiene: