$\boxed{\text{ESERCIZIO 4}}$ Calcolare il valore del limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{atn}(x^{-1}) - \operatorname{setth}(x^{-1})}{\ln^3\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)}$$

Poiché:

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln x} = \frac{\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$$

$$= 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$$

dal limite notevole $\frac{\ln(1+t)}{t} \xrightarrow{t\to 0} 1$ si ottiene

$$\ln^3\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right) = \frac{1}{x^3 \ln^3 x} + o\left(\frac{1}{x^3 \ln^3 x}\right)$$

Per determinare l'ordine di infinitesimo del numeratore si ricordi che

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{sett\,th} t) = \frac{1}{\left(\frac{d}{dt}\operatorname{th}\right)(\operatorname{sett\,th} t)} = \frac{1}{1-t^2}$$

da cui

$$\frac{d^2}{dt^2}(\operatorname{sett\,th} t) = \frac{2t}{(1-t^2)^2}$$

$$\frac{d^3}{dt^3}(\operatorname{sett\,th} t) = \frac{2}{(1-t^2)^4}\left((1-t^2)^2 - t\cdot 2(1-t^2)(-2t)\right)$$

e quindi tenendo conto della disparità della tangente iperbolica si ottiene

$$\operatorname{sett\,th} t = t + \frac{t^3}{3} + o(t^4)$$