ESERCIZIO 1: Trovare la famiglia delle primitive della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt[6]{x} + 4\sqrt[12]{x} + 4\right)}$$

su $[1,+\infty)$.

Usando il cambio di variabile $t(x) = \sqrt[12]{x}$ si ottiene

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{t^6\left(t^2+4t+4\right)}\, 12t^{11}\,dt = \int \frac{12t^5}{(t+2)^2}\,dt$$

Applicando l'algoritmo della divisione:

$$\begin{array}{l|l}
t^5 & t^2+4t+4 \\ \cline{2-2}
t^5+4t^4+4t^3 & t^3-4t^2+12t-32 \\
-\quad -4t^4-4t^3 & \\
-4t^4-16t^3-16t^2 & \\
-\quad 12t^3+16t^2 & \\
12t^3+48t^2+48t & \\
-\quad -32t^2-48t & \\
-32t^2-128t-128 & \\
-\quad 80t+128 &
\end{array}$$

quindi

$$\frac{12t^5}{(t+2)^2} = 12\left(t^3-4t^2+12t-32\right)+192\,\frac{5t+8}{(t+2)^2}$$

e quindi

$$\int \frac{12t^5}{(t+2)^2}\,dt = 3t^4-16t^3+72t^2-384t+192\int \frac{5t+8}{(t+2)^2}\,dt$$

Dato che $\displaystyle \frac{5t+8}{(t+2)^2} = \frac{5}{(t+2)} - \frac{2}{(t+2)^2}$,

con la sostituzione inversa si ottiene

$$\int f(x)\,dx = 3\sqrt[3]{x} - 16\sqrt[4]{x} + 72\sqrt[6]{x} - 384\sqrt[12]{x} + 960\ln\left|\sqrt[12]{x}+2\right| + \frac{384}{\sqrt[12]{x}+2} + \text{costante}$$