$\boxed{\text{ESERCIZIO 4:}}$ Calcolare

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos x \, \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}}{2+\operatorname{sen} x} \, dx.$$

Con la sostituzione $t = \operatorname{sen} x$ si ottiene

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+t}}{2+t} \, dt \underset{\substack{\uparrow \\ s=\sqrt{1+t} \\ 2s\,ds = dt}}{=} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2s^2}{\underbrace{2+s^2-1}_{s^2+1}} \, ds$$

$$= 2\left[\sqrt{2} - 1 - \operatorname{atn} s \Big|_1^{\sqrt{2}} \right] = 2\left[\sqrt{2} - 1 - \operatorname{atn} \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} \right]$$

Altrimenti, si può usare la sostituzione

$$t = \sqrt{1+\sin x} \implies 2t\,dt = \cos x \, dx$$

da cui

$$I = 2 \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2}{2+t^2-1} \, dt$$

come prima.