$\boxed{\text{ESERCIZIO 3:}}$ Sia
$$f(x)=\operatorname{atn}(\ln|x|)+\ln\left|\ln|x|-1\right|$$
allora $\mathrm{Dom} f=\mathbb{R}\setminus\{0,\pm e\}$, ed $f\in C^\infty(\mathrm{Dom} f)$.
Inoltre, f è pari, quindi restringeremo lo studio a $(0,+\infty)$.
Dal limite $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$, si deduce $\lim_{x\to 0^+} f=+\infty$
Poiché $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ si ottiene anche $\lim_{x\to+\infty} f=+\infty$
ed inoltre
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$
dato che $\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$. Infine, $\lim_{x\to e} f=-\infty$.

Si noti che $f(1)=0$, e che $\exists\,\xi\in(e,+\infty)$ t.c. $f(\xi)=0$
dato che $\lim_{x\to e} f=-\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f=+\infty$.

Se $x\in\mathrm{Dom} f\setminus\{0,\pm e\}$ si ha
$$f'(x)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+\ln^2|x|}+\frac{1}{\ln|x|-1}\right)=\frac{\ln^2|x|+\ln|x|}{x(\ln^2|x|+1)(\ln|x|-1)}$$
da cui:
$$f'(x)\geq 0 \overset{x>0,\,x\neq e}{\iff} (\ln^2|x|+\ln|x|)(\ln|x|-1)\geq 0$$
$$\iff x\in[e^{-1},1]\cup(e,+\infty)$$
e quindi
$$f \nearrow\nearrow \text{ su } [e^{-1},1]\cup(e,+\infty)$$
$$x=e^{-1} \text{ min. rel.}, \quad x=1 \text{ max rel.}$$

Segue così che $\exists\,\eta\in(0,e^{-1})$ t.c. $f(\eta)=0$ e
$f(x)>0 \iff x\in(0,\eta)\cup(\xi,+\infty)$
$f(x)=0 \iff x\in\{\eta,1,\xi\}$.