

ESERCIZIO 1:  $f_m(x) = m + (1-m)e^{\frac{x^2}{m^2} - \frac{x}{m}}$

(1)

Fissato  $x \in \mathbb{R}$ , poiché  $\frac{x^2}{m^2} - \frac{x}{m} \rightarrow 0$  per  $m \rightarrow +\infty$ ,  
si ottiene dallo sviluppo di Taylor di  $e^t$  in 0:

$$\begin{aligned} f_m(x) &= m + (1-m) \left( 1 + \frac{x^2}{m^2} - \frac{x}{m} + o\left(\frac{x^2}{m^2} - \frac{x}{m}\right) \right) \\ &= 1 + x^2 - \frac{x^2}{m} + o\left(\frac{x^2}{m}\right) \end{aligned}$$

da cui:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} f_m(x) = 1 + x^2.$$

Fissato  $m \in \mathbb{N}$ , la funzione  $f_m$  ha dominio  
dato da tutto  $\mathbb{R}$  ed è in  $C^\infty$ . Inoltre, è pari  
e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_m = m.$$

Quindi per il Teorema di Weierstrass  $f_m$   
ammette massimo su  $\mathbb{R}$  in un punto  $x_m \geq 0$   
(quindi per parità anche in  $-x_m$ ).

Poiché  $f_m(0) = 1 < m = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_m$ , segue  $x_m > 0$ .  
Infine, essendo  $x_m$  punto di massimo ab-  
soluto

$$f_m(x_m) \geq f_m(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

da cui  $f_m(x_m) \geq \lim_{m \rightarrow +\infty} f_m = m$

e quindi

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} f_m(x_m) = +\infty$$

Usando la derivata si trova che  $x_m = 1/\sqrt{2m}$   
e  $f_m(x_m) = m + (1-m)e^{-\frac{1}{2m^3}}$ .