

ESERCIZIO 3: $f(x) = x^{2x} - 2x^x - 3$

(3)

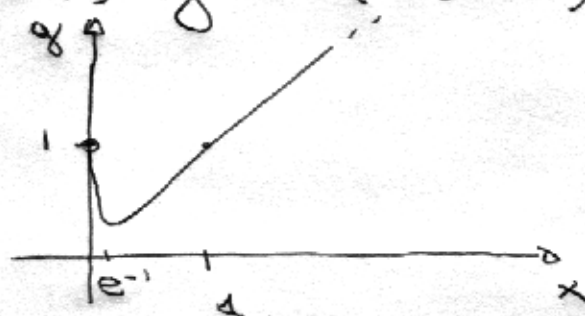
Poiché la funzione $x \mapsto x^x$ è definita su $D = (0, +\infty) \cup \{x \in \mathbb{Z} : x < 0\}$

anche f è definita sullo stesso insieme ed è in C^∞ .

Prima di studiare f , ricordiamo alcune proprietà di g :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g = 1 = g(1), \quad \min_D g = g(e^{-1}), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g = +\infty$$

$$g \searrow \text{ su } (0, e^{-1}), \quad g \nearrow \text{ su } (e^{-1}, +\infty), \quad g \text{ conv su } D$$



Sia $\varphi(t) = t^2 - 2t + 3$, allora $f(x) = \varphi(g(x))$, da cui:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f = \varphi(\lim_{x \rightarrow 0^+} g) = \varphi(1) = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \varphi(\lim_{x \rightarrow +\infty} g) = +\infty$$

Inoltre: $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t \in \{-1, 3\}$

da cui

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 3$$

$$\begin{aligned} g(2) &= 4 > 3 \\ g(1) &= 1 < 3 \end{aligned}$$

per le proprietà di $g \exists! z \in (1, 2)$ t.c. $g(z) = 3$

Segue:

$$f(x) < 0 \quad x \in (0, z)$$

$$f(x) > 0 \quad x \in (z, +\infty)$$