

ESERCIZIO 4: Sia

$$f(x) = \int_0^x [\ln(1+t)]^{\frac{42}{5}} dt \quad (6)$$

allora $\text{Dom} f = (-1, +\infty)$.

Proviamo che $f = o(x^3)$ $x \rightarrow 0$, infatti essendo f' crescente si ha:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{x^3} \right| &\leq \frac{1}{|x|^3} \int_0^{|x|} [\ln(1+t)]^{\frac{42}{5}} dt \leq \\ &\leq \frac{[\ln(1+|x|)]^{\frac{42}{5}}}{|x|^3} \end{aligned}$$

e la tesi segue dal limite notevole

$$\frac{\ln(1+t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1.$$

Adesso concludiamo si giunge con 2hm Hôpital

Per trovare uno sviluppo asintotico di f in $x=0$ si ricorda che

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

da cui:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \left[t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \right]^{\frac{42}{5}} dt = \int_0^x \left[t^{\frac{42}{5}} \left(1 - \frac{t}{2} + o(t) \right)^{\frac{42}{5}} \right] dt = \\ &= \int_0^x t^{\frac{42}{5}} \left(1 - \frac{21}{5} t + o(t) \right) dt = \\ (1+x)^a &= 1 + ax + o(x) \\ &= \frac{5}{47} x^{\frac{47}{5}} - \frac{21}{52} x^{\frac{52}{5}} + o(x^{\frac{52}{5}}). \end{aligned}$$

Chiaramente per risolvere l'esercizio si poteva prima trovare uno sviluppo asintotico di f per $x \rightarrow 0$ e usare quello per verificare che $f(x) = o(x^3)$ $x \rightarrow 0$.