ESERCIZIO 3

Sia

$$f(x) = \int_1^{\frac{1}{\ln x}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{t^3+t}}}_{=: h(t)} \, dt$$

posto $P(y) = \displaystyle\int_1^y \frac{1}{\sqrt{t^3+t}} \, dt$, si ha $f(x) = P\left(\frac{1}{\ln x}\right)$

Poiché $(t^3+t)^{-1/2} = t^{-1/2}(t^2+1)^{-1/2}$, si ha che

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^3+t}} \, dt \in \mathbb{R}^+$$

e quindi $\mathrm{Dom}\, P = [0,+\infty)$. Segue

$$\mathrm{Dom}\, f = (1,+\infty), \quad f \in C^\infty((1,+\infty))$$

e poiché $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln x = 0^+$ si ha

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t^3+t}} \, dt \in (\sqrt{2}, 2).$$

dato che $h(t) \in \left((2t^3)^{-1/2}, t^{-3/2}\right)$.

Inoltre, per quanto visto prima

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\int_0^1 h(t)\,dt \in \mathbb{R}$$

e più precisamente poiché per $t \in (0,1)$

$$(1+t)^{-1/2} \leq h(t) \leq t^{-1/2}$$

segue

$$\lim_{x\to+\infty} f \in \left(-2, -2(\sqrt{2}-1)\right)$$

Si noti che $f(e) = 0$.