$\forall x \in \mathrm{Dom} f$ dal Thm di Der.ne di F.ne composta e dal Thm Fond.le del Calcolo si ottiene

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\ln^3 x} + \frac{1}{\ln x}}}\left(-\frac{1}{x \ln^2 x}\right)$$

semplificando

$$f'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{\ln^3 x + \ln x}}$$

quindi

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (1, +\infty)$$

$$\Rightarrow f \searrow \text{ su } (1, +\infty)$$

Inoltre, $\forall x \in \mathrm{Dom} f$ f' è derivabile con

$$f''(x) = \frac{\sqrt{\ln^3 x + \ln x} + \cancel{x}\, \frac{3\ln^2 x + 1}{2\sqrt{\ln^3 x + \ln x}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}}{x^2 (\ln^3 x + \ln x)}$$

$$= \frac{2\ln^3 x + 3\ln^2 x + 2\ln x + 1}{x^2 \sqrt{\ln^3 x + \ln x}}$$

Il polinomio $p(t) = 2t^3 + 3t^2 + 2t + 1$ si annulla per $t = -1$, da cui segue

$$p(t) = (t+1)(2t^2 + t + 1)$$

e quindi $p(t) > 0 \ \forall t > -1$.
Da ciò si deduce che

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in (1, +\infty)$$