

ESERCIZIO 4 Sia $f \in C^2((-\delta, \delta))$, $\delta > 0$, t.c. (6)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \sin(f(x)) - \ln x}{(\cos x + \ln x - 2)^{1/2}} = 1 \quad (*)$$

calcolare $f''(0)$.

Dagli sviluppi di Taylor si ha

$$(\cos x + \ln x - 2)^{1/2} = \left(\frac{x^4}{12} + o(x^5) \right)^{1/2} = x^2 \left(\frac{1}{12} + o(x) \right)^{1/2}$$

e poiché il numeratore $m(x)$ è continuo in 0, affinché valga (*) si deve avere

$$0 = m(0) = f(0) + \sin(f(0)) \Leftrightarrow f(0) = 0$$

Se ora $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)$ si ha

$$\begin{aligned} m(x) &= 2(a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)) - x + o(x^2) \\ &= (2a_1 - 1)x + 2a_2 x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

e quindi (*) vale se e solo se

$$a_1 = 1/2, \quad a_2 = (\sqrt{3} \cdot 4)^{-1}.$$

Infine, poiché $f''(0) = 2a_2$, si ha

$$f''(0) = (2\sqrt{3})^{-1}.$$