ESERCIZIO 1 Proviamo l'enunciato (a):

$\underline{n=1}$:
$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{q^k} = \frac{1}{q} = \frac{q-1}{q(q-1)}$$

supponiamo vero $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q^k} = \frac{q^n-1}{q^n(q-1)}$ e proviamo che da ciò segue
$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{q^k} = \frac{q^{n+1}-1}{q^{n+1}(q-1)}.$$

Infatti:
$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{q^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q^k} + \frac{1}{q^{n+1}} = \frac{q^n-1}{q^n(q-1)} + \frac{1}{q^{n+1}}$$
$$= \frac{q^{n+1}-q+q-1}{q^{n+1}(q-1)} = \frac{q^{n+1}-1}{q^{n+1}(q-1)}$$

e quindi la tesi per il Principio di Induzione.

Proviamo l'enunciato (b):

$\underline{n=1}$:
$$\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{q^k} = \frac{1}{q} = \frac{(1-q)-q(1-q)}{q(q-1)^2}$$

Supponiamo che $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{q^k} = \frac{n(1-q)-q(1-q^n)}{q^n(q-1)^2}$, allora
$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{q^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{q^k} + \frac{(n+1)}{q^{n+1}} = \frac{n(1-q)-q(1-q^n)}{q^n(q-1)^2} + \frac{n+1}{q^{n+1}}$$
$$= \frac{nq(1-q)-q^2(1-q^n)+(n+1)(q-1)^2}{q^{n+1}(q-1)^2}$$
$$= \frac{(1-q)(nq+(n+1)(1-q))-q^2(1-q^n)}{q^{n+1}(q-1)^2}$$
$$= \frac{(n+1)(1-q)-q(1-q^{n+1})}{q^{n+1}(q-1)^2}$$

e quindi la tesi per il Principio di Induzione.