$\boxed{\text{ESERCIZIO 3}}$ Usando la definizione di limite verifichiamo che:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+(-1)^n 3n}{n^2-1} = 1$$

Fix $\varepsilon>0$ si deve trovare $N_\varepsilon>0$: $\forall n \geq N_\varepsilon$

$$(*) \quad \underbrace{\left|\frac{n^2+(-1)^n 3n}{n^2-1} - 1\right|}_{=\frac{(-1)^n 3n+1}{n^2-1}} < \varepsilon \iff -\varepsilon < \frac{1+(-1)^n 3n}{n^2-1} < \varepsilon$$

$$\overset{n>1}{\iff} -\varepsilon(n^2-1) < 1+(-1)^n 3n < \varepsilon(n^2-1).$$

Se n è pari: $-\varepsilon(n^2-1)<0<1+\overset{1}{\cancel{(-1)^n}}3n$; quindi studiamo per tali n la disuguaglianza

$$1+\overset{1}{\cancel{(-1)^n}}3n < \varepsilon(n^2-1) \iff \varepsilon n^2-3n-(1+\varepsilon)>0$$

$$\iff n < \frac{3-\sqrt{9+4\varepsilon(1+\varepsilon)}}{2\varepsilon}, \quad n > \frac{3+\sqrt{9+4\varepsilon(1+\varepsilon)}}{2\varepsilon}.$$

e quindi la disuguaglianza è verificata se

$$n \geq \tilde{N}_\varepsilon = 1+\left[\frac{3+\sqrt{9+4\varepsilon(1+\varepsilon)}}{2\varepsilon}\right].$$

Se n è dispari: $1-3n \overset{n\geq 1}{<} 0 < \varepsilon(n^2-1)$; quindi studiamo per tali n la disuguaglianza

$$1+\overset{-1}{\cancel{(-1)^n}}3n > -\varepsilon(n^2-1) \iff \varepsilon n^2-3n+(1+\varepsilon)>0$$

$$\iff n \leq \frac{3-\sqrt{9-4\varepsilon(1-\varepsilon)}}{2\varepsilon}, \quad n \geq \frac{3+\sqrt{9-4\varepsilon(1-\varepsilon)}}{2\varepsilon}$$

questo se $9-4\varepsilon(1-\varepsilon)\geq 0$ sempre verificata.
Quindi la disuguaglianza è verificata se

$$n \geq \tilde{\tilde{N}}_\varepsilon = 1+\left[\frac{\sqrt{3+9-4\varepsilon(1-\varepsilon)}}{2\varepsilon}\right]$$

Scegliendo $N_\varepsilon = \tilde{N}_\varepsilon \vee \tilde{\tilde{N}}_\varepsilon$, $(*)$ è verificata $\forall n \geq N_\varepsilon$.