(2)

$\boxed{\text{ESERCIZIO 2}}$ $A = \left\{ \alpha \in \mathbb{R} : \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n^2+1}^{n^2+n} \frac{1}{k^\alpha} = 0 \right\}$

Si osservi che se $\alpha \in A \Rightarrow \alpha > 0$, infatti per $\alpha \leq 0$

$$\sum_{k=n^2+1}^{n^2+n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{(n^2+1)^\alpha} \geq 1 .$$

Se inoltre $\alpha > 0$, allora

$$k \geq n^2+1 \Rightarrow \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n^2+1} \overset{\alpha>0}{\Rightarrow} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{(n^2+1)^\alpha}$$

$$\frac{n}{(n^2+n)^\alpha} \leq \sum_{k=n^2+1}^{n^2+n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{n}{(n^2+1)^\alpha} = \frac{n^{1-2\alpha}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^\alpha}$$

$$k \leq n^2+n \Rightarrow \frac{1}{k} \geq \frac{1}{n^2+n}$$

$$\frac{n}{(n^2+n)^\alpha} = \frac{n^{1-2\alpha}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha}$$

e quindi $\alpha \in A \Leftrightarrow \alpha > 1/2$.

Da ciò segue $\sup A = +\infty$, $\inf A = 1/2$.

Infine, $\frac{1}{2}$ non è minimo dato che per tale valore

$$\sum_{k=n^2+1}^{n^2+n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 .$$