$\boxed{\text{ESERCIZIO 5.}}$

La funzione f è continua $\forall\, x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ perché composizione e prodotto di funzioni continue in tali punti.

Per vedere se per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$ può essere estesa con continuità in $x = 0$ calcoliamo i limiti destro e sinistro in tale punto.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \overset{1}{\cancel{\frac{\operatorname{sen}(x)\, x}{x^2}}} \left(\overset{1}{\cancel{\frac{x^2}{\ln(1+x^2)}}} \right)^{\alpha} |x|^{4-2\alpha}$$

$$= \begin{cases} 0 & \alpha < 2 \\ 1 & \alpha = 2 \\ +\infty & \alpha > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\cos^2(\alpha x) \right)^{\frac{1}{x \operatorname{sen} x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{\ln(\cos^2(\alpha x))}{x \operatorname{sen} x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} e^{\overset{1}{\cancel{\frac{\ln(\cos^2(\alpha x))}{\cos^2(\alpha x) - 1}}} \overset{1}{\cancel{\frac{x^2}{\operatorname{sen} x}}} \frac{\cos^2(\alpha x) - 1}{x^2}} = e^{-\alpha^2}$$

dato che:

$$\frac{\cos^2(\alpha x) - 1}{x^2} = \overset{2}{\cancel{(\cos(\alpha x) + 1)}} \overset{-\frac{1}{2}\alpha^2}{\cancel{\frac{\cos(\alpha x) - 1}{x^2}}}$$

Infine, poiché $e^{-\alpha^2} \neq 0 \ \forall \alpha$ e $e^{-\alpha^2} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0$ i limiti destro e sinistro di f non coincidono per alcun valore di α.

f non può essere estesa con continuità in $x = 0$ per alcun $\alpha \in \mathbb{R}$.