$\boxed{\text{ESERCIZIO 5:}}$ Studiamo la convergenza di: (8)

$$\int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{x^3+3x+1}{7x^2-\cos x}\, \operatorname{atn}\left(\frac{x^5+3}{x+1}\right)\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)}_{f(x)} dx$$

Poiché $7x^2-\cos x \geq 6$ se $x \geq 1$, $\operatorname{Dom} f \cap (1,+\infty) = (1,+\infty)$ ed f è ivi continua.
Quindi l'integrabilità in senso improprio va verificata dato che si integra in un intervallo illimitato.

Per x sufficientemente grande $f(x) \leq 0$ ed usando lo sviluppo: $\operatorname{sen}\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

si ottiene:

$$f(x) = \frac{x^3+3x+1}{7x^2-\cos x} \cdot \operatorname{atn}\left(\frac{x^5+3}{x+1}\right) \cdot \left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{x^2+3+\frac{1}{x}}{7x^2-\cos x}\left(\frac{\pi}{2}+o(1)\right) \cdot \left(-\frac{1}{6x^2}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right);$$

quindi confrontando asintoticamente f con $g(x) = -\frac{1}{x^2}$ si ottiene: $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{1}{42}\cdot\frac{\pi}{2}$

e quindi l'integrale di f risulta convergente.