$\boxed{\text{ESERCIZIO 2:}}$ Troviamo l'integrale indefinito della funzione (2)

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(2x)\,(2\operatorname{sen}+1)^2}{\sqrt{4\operatorname{sen}^2 x + 4\operatorname{sen} x + 10} - 3}$$

Razionalizzando il denominatore si ottiene

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(2x)\,(2\operatorname{sen}+1)^2}{4\operatorname{sen}^2 x + 4\operatorname{sen} x + 1}\left(\sqrt{4\operatorname{sen}^2 x + 4\operatorname{sen} x + 10} + 3\right)$$

$$= \operatorname{sen}(2x)\left(\sqrt{4\operatorname{sen}^2 x + 4\operatorname{sen} x + 10} + 3\right)$$

Da cui:

$$\int f(x)\,dx = \int \operatorname{sen}(2x)\sqrt{4\operatorname{sen}^2 x + 4\operatorname{sen} x + 10}\,dx$$

$$- \frac{3}{2}\cos(2x) = I_1 - \frac{3}{2}\cos(2x)$$

Per l'integrale I_1 rimasto usiamo la sostituzione $t(x) = \operatorname{sen} x$, ricordando che

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cos x,$$

da cui segue:

$$I_1 \underset{t=t(x)}{=} 2\int t\,\sqrt{\underbrace{4t^2+4t+10}_{=(2t+1)^2+9\,=\,3\sqrt{\left(\frac{2t+1}{3}\right)^2+1}}}\,dt$$

$$\underset{s=\frac{2t+1}{3}}{=} 9\int \frac{3s-1}{2}\sqrt{s^2+1}\,ds = \frac{27}{2}\underbrace{\int s\sqrt{s^2+1}\,ds}_{I_2} - \frac{9}{2}\underbrace{\int \sqrt{s^2+1}\,ds}_{I_3}$$

I_2 si ottiene per sostituzione ponendo $r = s^2$: (o accorgendosi che l'integrando è proporzionale ad una derivata)