ESERCIZIO 4: Sia $f(x) = e^{x^2-1} \cdot \ln x$

per provarne l'invertibilità in un intorno di $x = 1$ verifichiamo che $f'(1) > 0$ e che f' è continua in tale punto.
Infatti, $f \in C^\infty((0,+\infty))$ e:

$$f'(x) = e^{x^2-1}\left(2x\ln x + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow f'(1) = 1$$

Detta g l'inversa in un intorno di $x=1$, poiché $f(1) = 0$ si ha $g(0) = 1$; g è continua.
Per il Thm della derivabilità della funzione inversa in tale intorno vale

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

quindi g è di classe C^2.
Ha senso cercarne lo sviluppo di Taylor al secondo ordine:

$$g(y) = \cancel{g(0)}^{1} + g'(0)\,y + \frac{g''(0)}{2}y^2 + o(y^2)$$

Poiché: $$g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))} = \frac{1}{f'(1)} = 1$$

e

$$g''(y) = -\frac{f''(g(y))}{(f'(g(y)))^3} = -f''(1) = -3$$

$$f''(x) = e^{x^2-1}\left(4x^2\ln x + 2\ln x + 4 - \frac{1}{x^2}\right)$$

segue:

$$g(y) = 1 + y - \frac{3}{2}y^2 + o(y^2) \qquad (*)$$

Si deve calcolare: $$\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y - \ln(g(y))}{\operatorname{sh}(y^2)}.$$