ESERCIZIO 3: Tracciare un grafico di

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}-1\right)^2\left(\frac{1}{x}-4\right) = \frac{1}{x^3} - \frac{6}{x^2} + \frac{9}{x} - 4 = p\left(\frac{1}{x}\right)$$

avendo posto $p(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 4$.

$\mathrm{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f \in C^\infty(\mathrm{Dom} f)$ ed è chiaro che

$$\lim_{x\to 0^\pm} f = \pm\infty.$$

Inoltre, si ha: $f(x) \geq 0 \iff x = 1$ o $\frac{1}{x} \geq 4 \iff$

$$x \in \{1\} \cup \left(0, \frac{1}{4}\right)$$

f ha asintoto orizzontale a $\pm\infty$ dato dalla retta $y = -4$.

Per trovare f' si può o derivare direttamente f o usare la regola di derivazione di funzione composta e l'espressione $f(x) = p\left(\frac{1}{x}\right)$. In entrambi i casi si arriva a

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\left(\frac{3}{x^2} - \frac{12}{x} + 9\right) = -\frac{3}{x^2}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x} + 3\right)$$

$\forall x \in \mathrm{Dom} f$.

Quindi: $f'(x) \geq 0 \iff \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x} + 3 \leq 0 \iff$

$$\frac{1}{x} \in [1, 3] \iff x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$$

da cui:

$f \nearrow\nearrow \quad x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$

$f \searrow\searrow \quad x \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{3}\right] \cup [1, +\infty)$

$x = \frac{1}{3}$ minimo relativo

$x = 1$ massimo relativo