CORSO di LAUREA in FISICA

ANALISI MATEMATICA 1

Prova scritta

7 dicembre 2006

Svolgere al più quattro dei seguenti esercizi.

1. Provare che la successione

$$a_n = \frac{((n+2)!)^{n-1} - ((n-1)!)^{n+1}}{(n^2 n!)^{n-1}}$$

ammette limite e^3 per $n \to +\infty$.

2. Trovare l'integrale indefinito della funzione

$$f(x) = \frac{\sin(2x)(2\sin x + 1)^2}{\sqrt{4\sin^2 x + 4\sin x + 10} - 3}.$$

3. Tracciare un grafico approssimativo della funzione

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 \left(\frac{1}{x} - 4\right).$$

4. Provare che la funzione

$$f(x) = e^{x^2-1} \ln x$$

è invertibile in un intorno del punto $x = 1$. Detta g l'inversa, si determini il polinomio di Taylor di grado 2 di g centrato nel punto $y = 0$. Quindi si calcoli il valore del seguente limite

$$\lim_{y \to 0} \frac{\sin y - \ln(g(y))}{\sinh(y^2)}.$$

5. Studiare la convergenza del seguente integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^3 + 3x + 1}{7x^2 - \cos x} \arctan\left(\frac{x^5 + 3}{x + 1}\right) \left(\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) dx.$$