$\boxed{\text{ESERCIZIO 4}}$ Sia

$$f(x) = x^2 \ln\left(\cos(\operatorname{sh} x) - \operatorname{sen}(\pi \operatorname{ch} x)\right)$$

si noti che $0 \in \operatorname{Dom} f$, e per continuità dell'argomento del logaritmo il dominio di f contiene un intorno dell'origine: $(-\varepsilon, \varepsilon)$.
$f \in C^\infty((-\varepsilon,\varepsilon))$, cerchiamone uno sviluppo centrato in 0 usando gli sviluppi delle funzioni che compaiono nella sua definizione:

$$\cos(\operatorname{sh} x) = 1 - \frac{(\operatorname{sh} x)^2}{2} + o((\operatorname{sh} x)^2) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\pi \operatorname{ch} x) &= \operatorname{sen}\left(\pi\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\right)\\ &= \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{2}x^2 + o(x^2)\right)\\ &= -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x^2 + o(x^2)\right) = -\frac{\pi}{2}x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$

da cui:

$$\begin{aligned}\ln\left(\cos(\operatorname{sh} x) - \operatorname{sen}(\pi \operatorname{ch} x)\right) &= \ln\left(1 + \frac{\pi - 1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\\ &= \frac{\pi - 1}{2}x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

e quindi

$$f(x) = \frac{\pi - 1}{2}x^4 + o(x^4) \qquad x \to 0$$

Da ciò segue che $f(x) > \overset{0}{\cancel{f(0)}}$ se $x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$, con $0 < \delta < \varepsilon$ opportuno.