ESERCIZIO 1 Sia $f_n(x) = e^{x^n}/x^{e^n}$, allora:

$\mathrm{Dom}\, f_n = (0, +\infty)$, $\lim_{x \to 0^+} f_n = \lim_{x \to +\infty} f_n = +\infty$ ed f_n è continua su $\mathrm{Dom}\, f_n$.
Per il Teorema di Weierstrass generalizzato f_n ammette minimo assoluto $x_n \in (0, +\infty)$.
Poiché $f_n \in C^1((0, +\infty))$, x_n soddisfa $f_n'(x_n) = 0$.

Si ha:
$$f_n(x) = e^{x^n - e^n \ln x}$$

da cui
$$f_n'(x) = f_n(x)\left(n x^{n-1} - \frac{e^n}{x}\right)$$
quindi essendo $f_n(x) \neq 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$.

$$f_n'(x) = 0 \iff n x^{n-1} - \frac{e^n}{x} = 0$$
$$\iff x^n = \frac{e^n}{n}.$$

Da ciò segue che $x_n = \dfrac{e}{\sqrt[n]{n}}$ e quindi $\lim_{n \to +\infty} x_n = e$.
Inoltre:
$$f_n(x_n) = e^{\frac{e^n}{n} - e^n\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)} = e^{e^n \overbrace{\left(\frac{1}{n} - 1 + \frac{\ln n}{n}\right)}^{\xrightarrow{n \to +\infty} -1}}$$

e quindi $\lim_{n \to +\infty} f_n(x_n) = 0$.