$\boxed{\text{ESERCIZIO 4.}}$ Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare il comportamento dell'integrale improprio

$$\int_3^{+\infty} \underbrace{\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{x+1}\right) - \operatorname{atn}\left(\frac{\pi}{x+1}\right)\right] x^2 \ln^\alpha x}_{f(x):=}\, dx$$

Poiché $f \in C^0([0,+\infty))$, si deve solo capire il comportamento di f in un intorno di $+\infty$.
Essendo $\frac{x}{x+1} \xrightarrow{x\to+\infty} 1$, si ha

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{x+1}\right) = \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{-\pi}{x+1}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x+1}\right)$$

da cui

$$f(x) = \frac{\pi^3}{6}\frac{1}{(x+1)^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

Quindi $f > 0$ se x è sufficientemente grande, e l'integrale improprio esiste.
Per confronto asintotico il suo carattere è quello di

$$\int_3^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x}\, dx$$

e quindi converge se e solo se $\alpha < -1$.