ESERCIZIO 2: Sia

(2)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{(1+t^4)^{\frac{1}{2}}}\,dt & x\neq 0 \end{cases}$$

1° MODO: Dimostriamo che $x=0$ è in realtà massimo di f su tutto $\mathbb{R}$. Infatti, per $x>0$

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_x^{2x} \frac{1}{(1+t^4)^{\frac{1}{2}}}\,dt \underset{(1+t^4)^{-1/2}\leq 1}{\leq} \frac{1}{x}\int_x^{2x} 1\,dt = 1 = f(0)$$

Per $x<0$ si noti che $x>2x$, da cui

$$\int_{2x}^{x} \frac{1}{(1+t^4)^{\frac{1}{2}}}\,dt \leq -x \implies f(x)\leq 1 = f(0)$$

2° MODO: Usiamo sviluppi di Taylor di funzioni note per trovare quello di f.

Da $(1+s)^{-1/2} = 1-\frac{s}{2}+o(s)$ e $\int_0 o(s^\alpha)\,ds = o(s^{\alpha+1})$ $(\alpha>0)$

si ottiene

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_x^{2x}\left(1-\frac{t^4}{2}+o(t^4)\right)dt = 1-\frac{1}{10}\left(\frac{(2x)^5-x^5}{x}\right)+\frac{o(x^5)}{x}$$

$$= 1-\frac{31}{10}x^4+o(x^4)$$

e quindi $f(x)\leq 1 = f(0)$ in un intorno di $x=0$.