$\boxed{\text{ESERCIZIO 3}}$

Sia
$$f(x) = \ln\Big(\underbrace{\frac{e^{2x}-3e^{x}+2}{e^{x}-3}}_{h(e^x):=}\Big) + \frac{8}{3}x$$

allora $\operatorname{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} : h(e^x) > 0\}$, poiché

$$h(t) = \frac{t^2-3t+2}{t-3} = \frac{(t-1)(t-2)}{t-3}$$

si ottiene
$$\operatorname{Dom} f = (0, \ln 2) \cup (\ln 3, +\infty)$$

ed inoltre
$$\lim_{x\to 0^+} f = \lim_{x\to(\ln 2)^-} f = -\infty,$$
$$\lim_{x\to(\ln 3)^+} f = +\infty.$$

In particolare dal Thm di Weierstrass f ha massimo relativo in $(0, \ln 2)$.

Inoltre, poiché
$$f(x) = \ln\Big(1 + \frac{2e^{-x}}{e^{x}-3}\Big) + \overbrace{x + \frac{8}{3}x}^{+\frac{11}{3}x}$$

si ottiene $\lim_{x\to+\infty} f = +\infty$, più precisamente la retta $y = \frac{11}{3}x$ è asintoto obliquo a $+\infty$ e f ha min. rel. in $(\ln 3, +\infty)$.
$f \in C^\infty(\operatorname{Dom} f)$, e $\forall x \in \operatorname{Dom} f$ si ha

$$f'(x) = \frac{(e^{x}-3)}{e^{2x}-3e^{x}+2}\,\frac{(2e^{2x}-3e^{x})(e^{x}-3)-(e^{2x}-3e^{x}+2)e^{x}}{(e^{x}-3)^2} + \frac{8}{3}$$

$$= \ldots = \frac{11e^{3x}-66e^{2x}+109e^{x}-48}{3(e^{3x}-6e^{2x}+11e^{x}-6)}$$