ESERCIZIO 3: Studiare la funzione

$$f(x) = \operatorname{atn}\left(\frac{x^2+1}{||x|-1|}\right)$$

$\mathrm{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, f è pari quindi studieremo il suo comportamento su $[0,+\infty) \setminus \{1\}$.

Si ha

$$\lim_{x \to 1} f = \lim_{x \to +\infty} f = \frac{\pi}{2}$$

Poiché $f \leq \frac{\pi}{2}$, $f \in C^0((1,+\infty))$, f ha un minimo assoluto su $[0,+\infty)$, e un min rel. su $(1,+\infty)$.

Infine $f(x) > 0 \ \forall x \in \mathrm{Dom} f$.

Essendo $f \in C^1(\mathrm{Dom} f \setminus \{0\})$ per tali punti si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2+1}{||x|-1|}\right)^2} \cdot \frac{2x\,||x|-1| - (x^2+1)\operatorname{sgn}(|x|-1)\operatorname{sgn} x}{||x|-1|^2}$$

$$= \operatorname{sgn}(|x|-1) \cdot \frac{2x(|x|-1) - (x^2+1)\operatorname{sgn} x}{(|x|-1)^2 + (x^2+1)^2}$$

da cui

$$\lim_{x \to 0^+} f' = \frac{1}{2} \neq \lim_{x \to 0^-} f' = -\frac{1}{2}$$

quindi f non è derivabile in $x=0$ ed ha lì un punto angoloso.

Per $x \in (0,+\infty) \setminus \{1\}$ l'espressione della derivata si semplifica:

$$f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2+(x^2+1)^2} \operatorname{sgn}(x-1)$$