$\boxed{\text{ESERCIZIO 4:}}$ Sia $\alpha \in [0,+\infty)$, determinare per quali valori (6)

$$f(x) = \int_{x^4}^{x^2} \frac{1}{\ln|t|}\,dt$$

è $o(|x|^\alpha)$ per $x \to 0$.

Si noti che $\lim_{x\to 0} f = 0$, essendo $t \to \ln t$ crescente su $(0,+\infty)$ e quindi

$x \in (0,1) \cup (-1,0)$

$$\frac{x^2 - x^4}{2\ln|x|} \leq f(x) \leq 0$$

Inoltre $f \in C^\infty((0,1))$, possiamo quindi usare il teorema di de L'Hôpital per studiare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$$

Si ha:

$$\frac{f'(x)}{x^{\alpha-1}} = \frac{\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\ln|x|} - \frac{\cancel{4}x^3}{\cancel{4}\ln|x|}}{x^{\alpha-1}}$$

$$= \frac{1-x^2}{x^{\alpha-2}\cdot \ln|x|}$$

da cui

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{x^{\alpha-1}} = \begin{cases} -\infty & \alpha > 2 \\ 0 & \alpha \leq 2 \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha} = \begin{cases} -\infty & \alpha > 2 \\ 0 & \alpha \leq 2 \end{cases}$$

ed essendo $\frac{f(x)}{|x|^\alpha}$ pari si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{|x|^\alpha} = \begin{cases} -\infty & \alpha > 2 \\ 0 & \alpha \leq 2 \end{cases}$$

Da cui $f(x) = o(|x|^\alpha)$ sse $\alpha \in [0,2]$.